

# Modular Tensor Category と

## 3次元 TQFT

村上 順 (早大)

研究集会

共形場理論, 作用素環論とモジュラーなテンソル圏

2005 年 9 月 12 日 ~ 16 日

## 内容

1. Modular Tensor Category
2. 3次元 TQFT
3. 例

参考書：

Lectures on Tensor Categories and Modular Functors, Bojko Bakalov, Alexander Kirillov Jr.  
Amer. Math. Soc. Univ. Lecture Ser. 21



組紐群  $+$   $\alpha$

背景： 結び目, 3次元多様体の 量子不変量

# 1 Modular Tensor Category

## Category (圏)

Object + Morphism

以下では，具体的な内容は問わず，形式的な枠組みについて述べる．

morphism は object 間の写像（をあらわす矢印，記号）

$\text{Mor}(A, B)$  :  $A$  から  $B$  への morphism の集合

満たすべき公理（自然な性質）

例：合成写像が存在する．

**Functor** Category 間の準同型

## Additive Category

- $\text{Mor}(A, B)$  が  $k$ -vector space  
     $\text{Mor}(A, B)$  のかわりに  $\text{Hom}(A, B)$  と書く.
- $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C) : k$ -bilinear
- ゼロ obj.  $0$  がある.  $\text{Hom}(0, A) = \text{Hom}(A, 0) = 0$
- 有限直和が存在する.

## Abelian Category (Additive Category であり)

- 任意の mor. に  $\ker$  と  $\text{coker}$  が存在する.  
    (どちらも morphism である)
- 任意の mor. は全射と単射の合成である.  
    (全射の値域が Image にあたる)

# Monoidal Category

$\mathcal{C}$  : カテゴリー

- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  は bifunctor.
- $\alpha_{UVW} : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$  は functorial isomorphism.
- unit object **1** の存在

$\lambda_V : 1 \otimes V \rightarrow V, \quad \rho_V : V \otimes 1 \rightarrow V$  functorial isom's.

## • Associativity axiom

$X_1, X_2$  がともに  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  に適当に括弧を付けたものとする、 $X_1$  から  $X_2$  への functorial isom. は well-defined.

$$X_1 = (V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes \dots \otimes (V_{n-1} \otimes V_n)$$

$$X_2 = (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes \dots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n$$

$\alpha^{-1}$  (αの逆)  $\lambda, \rho, \alpha^{-1}, \rho^{-1}$   
 $\uparrow$   
 $\tau \otimes 1$

# MacLane Coherence Theorem

## Theorem.

Functorial isomorphisms について次が可換になれば monoidal category である.

### Pentagon axiom

$$\begin{array}{ccc}
 & ((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4 & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 (V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4 & \xrightarrow{\quad} & (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4) & \longrightarrow & V_1 \otimes (V_2 \otimes (V_3 \otimes V_4))
 \end{array}$$

### Triangle axiom

$$\begin{array}{ccc}
 (V_1 \otimes 1) \otimes V_2 & \longrightarrow & V_1 \otimes (1 \otimes V_2) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 & V_1 \otimes V_2 &
 \end{array}$$

# Braided Tensor Category $\mathcal{C}$ : カテゴリー

$$\sigma_{VW} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$$

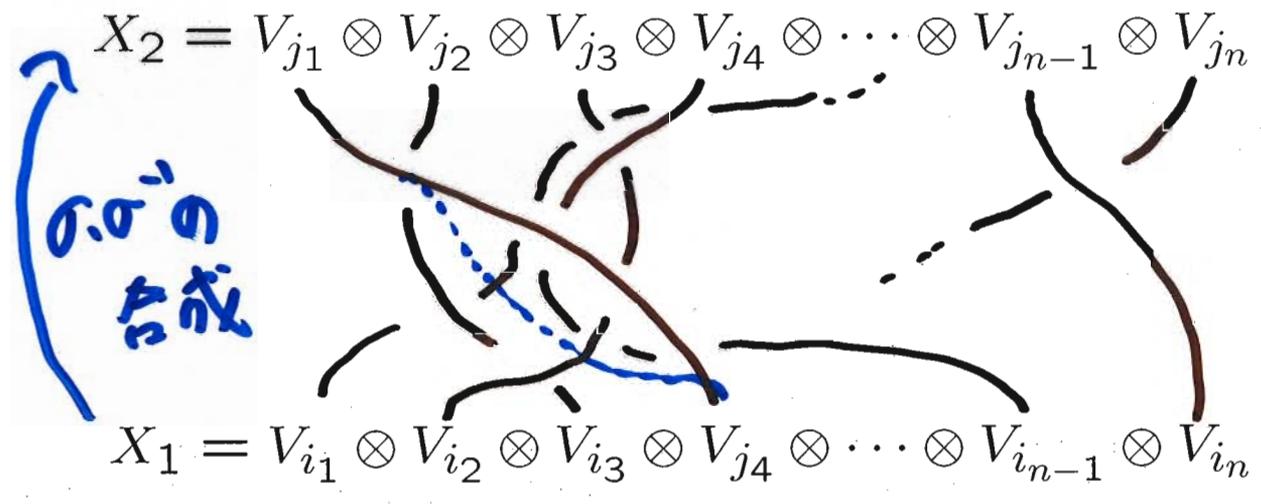
functorial i.e. **isom**

$$\sigma_{V'W'}(f \otimes g) = (f \otimes g) \sigma_{VW}$$

**f ⊗ g**

が存在し，組紐の捻れに対応するもの。  
 ( $\sigma_{WV} \circ \sigma_{VW} = id$  とは限らない)

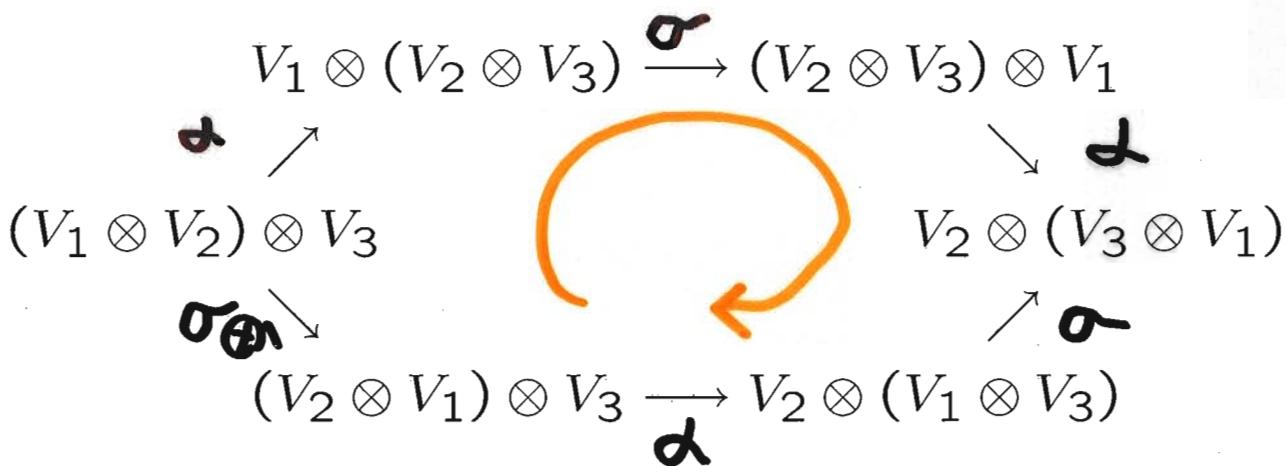
**定義 (BTC)** (monoidal cat. であって)  
 $V_1, \dots, V_n$  を適当に並べてテンソル積したものの  $X_1, X_2$  の間の func. isom. は  $\sigma$  から定まる組紐群の元から一意的に定まる。



**Coherence Theorem**

$(C, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho, \sigma)$  が次を満たせば BTC である.

- 括弧のつけ方に関する **Pentagon axiom**
- 1 に関する **Triangle axiom**
- 組紐関係式に対応する **hexagon axiom**



# Rigid Monoidal Category

dual obj. があり, よい性質 を持つ.

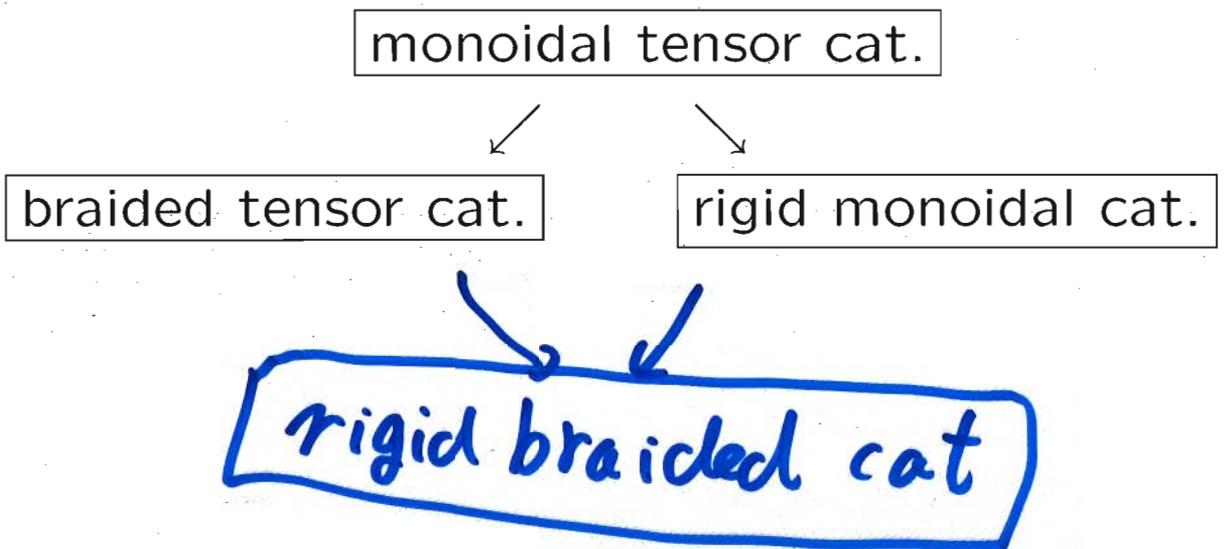
- right dual  $V^*$

**evaluation**  $e_V : V^* \otimes V \rightarrow 1$ ,  $i_V : 1 \rightarrow V \otimes V^*$  **inclusion**

$$\begin{array}{ccc}
 1 \otimes V & \xrightarrow{i_V} & V \otimes V^* \otimes V \\
 \text{id} \searrow & \curvearrowright & \downarrow e_V \\
 & & V \otimes 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V^* \otimes 1 & \xrightarrow{i_{V^*}} & V^* \otimes V \otimes V^* \\
 \text{id} \searrow & \curvearrowright & \downarrow e_{V^*} \\
 & & 1 \otimes V^*
 \end{array}$$

- left dual  ${}^*V$   $e'_V : V \otimes {}^*V \rightarrow 1$ ,  $i'_V : 1 \rightarrow {}^*V \otimes V$

right dual と同様の関係式を満たす.



$\text{End}(1) = \mathcal{K}$ . (1の条件)  
 $\uparrow$   
 unit obj.

**Lemma**

1.  $\text{Hom}(U \otimes V, W) = \text{Hom}(U, W \otimes V^*)$
2.  $\text{Hom}(U, V \otimes W) = \text{Hom}(V^* \otimes U, W)$

Proof for 1.

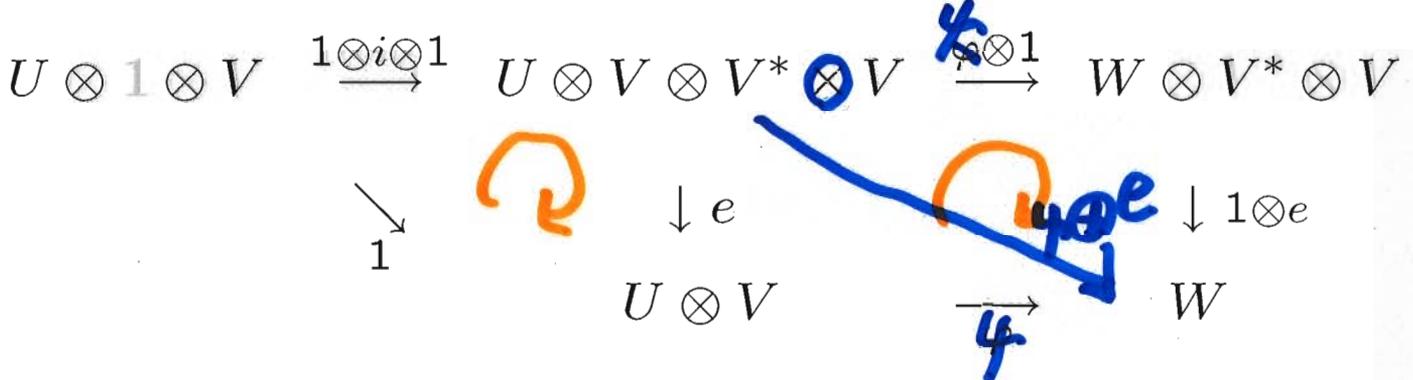
$\psi \in \text{Hom}(U \otimes V, W)$  に対し,  $\text{Hom}(U, W \otimes V^*)$  の元を

$$U \xrightarrow{1 \otimes i} U \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{\psi \otimes 1} W \otimes V^* \quad \text{と定め}$$

$\varphi \in \text{Hom}(U, W \otimes V^*)$  に対し,  $\text{Hom}(U \otimes V, W)$  の元を

$$U \otimes V \xrightarrow{\varphi \otimes 1} W \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{1 \otimes e} W \quad \text{と定める.}$$

下記よりこれらは互いに逆対応になっている.



**Cor.**  $\text{Hom}(V, W) = \text{Hom}(W^*, V^*)$   
 (dual morphism が定義できる)

**Ribbon Category** (rigid braided tensor cat. であって)

**full**

*Balancing isomorphism (twist)*

$$\theta_V : V \longrightarrow V$$

があって次を満たす.

### Balancing axioms

- functorial
- $\theta_{V \otimes W} = \sigma_{WV} \sigma_{VW} (\theta_V \otimes \theta_W)$
- $\theta_1 = id$
- $\theta_{V^*} = (\theta_V)^*$

$\theta_V$  はリボンの捻れに対応している.

isomorphism

$$\psi_V : V^{**} \xrightarrow{i} V \otimes V^* \otimes V^{**} \xrightarrow{\sigma^{-1}} V \otimes V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{e} V$$

とすると

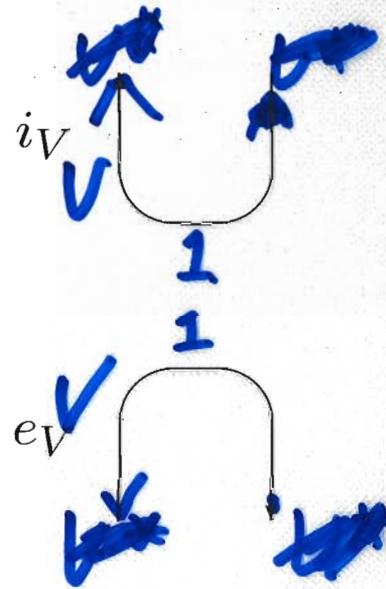
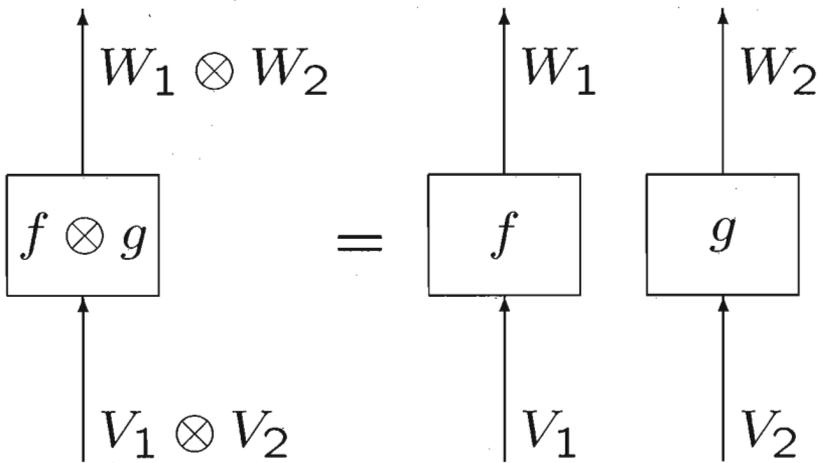
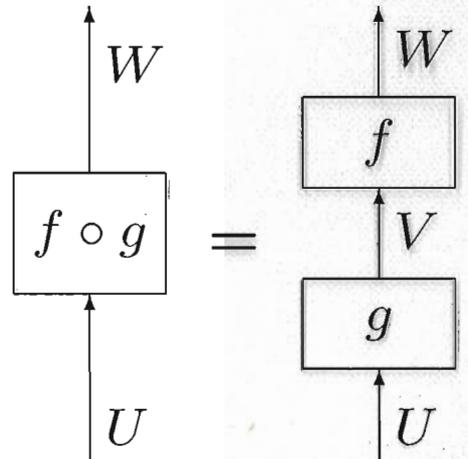
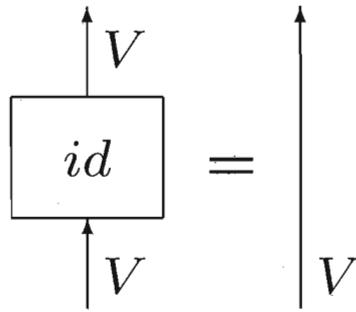
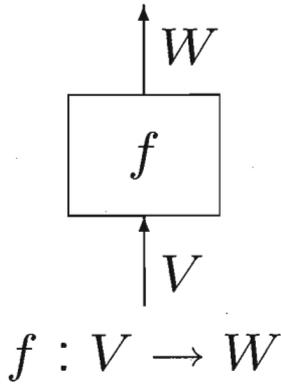
$$\delta_V := \psi_V^{-1} \theta_V : V \longrightarrow V^{**}$$

は次を満たす.

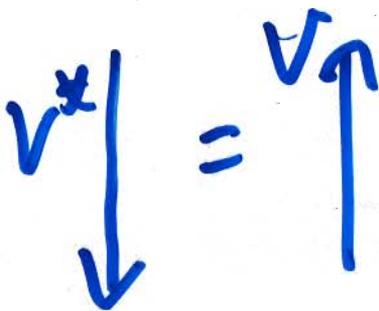
- functorial
- $\delta_{V \otimes W} = \delta_V \otimes \delta_W$
- $\delta_1 = id$
- $\delta_{V^*} = (\delta_V^*)^{-1}$

double dual から元の obj. への自然な同型写像になる.

# Graphical Calculus

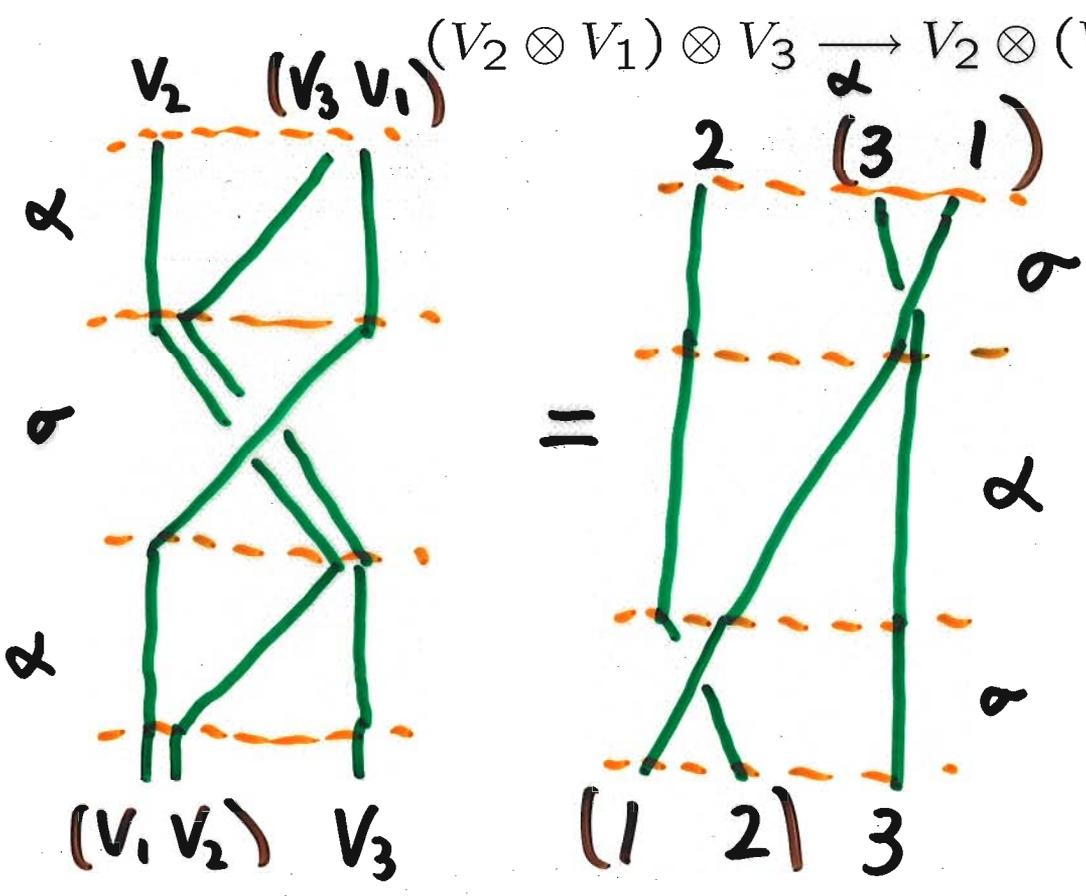
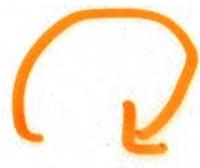


今までの例の graphical calculus  
 (Hexagon axiom, 4枚前の公理, 3枚前の Lemma)



● 組紐関係式に対応する hexagon axiom

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \xrightarrow{\sigma} & (V_2 \otimes V_3) \otimes V_1 \\
 \alpha \nearrow & & \searrow \alpha \\
 (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & & V_2 \otimes (V_3 \otimes V_1) \\
 \sigma \searrow & & \nearrow \sigma
 \end{array}$$



• right dual  $V^*$

$$e_V : V^* \otimes V \rightarrow \mathbf{1}, \quad i_V : \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$$

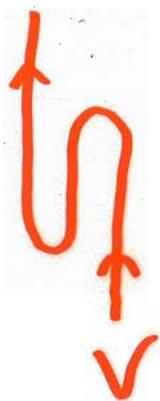
$$1 \otimes V \xrightarrow{i_V} V \otimes V^* \otimes V \quad V^* \otimes 1 \xrightarrow{i_{V^*}} V^* \otimes V \otimes V^*$$

$$id \searrow \text{?} \downarrow e_V$$

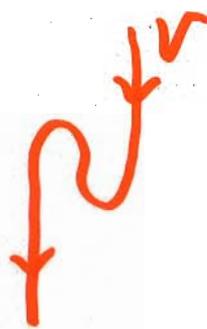
$$id \searrow \text{?} \downarrow e_{V^*}$$

$$V \otimes 1$$

$$1 \otimes V^*$$



=



=



**Lemma**

1.  $\text{Hom}(U \otimes V, W) = \text{Hom}(U, W \otimes V^*)$
2.  $\text{Hom}(U, V \otimes W) = \text{Hom}(V^* \otimes U, W)$

Proof for 1.

$\psi \in \text{Hom}(U \otimes V, W)$  に対し,  $\text{Hom}(U, W \otimes V^*)$  の元を

$$U \xrightarrow{1 \otimes i} U \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{\psi \otimes 1} W \otimes V^* \quad \text{と定め}$$

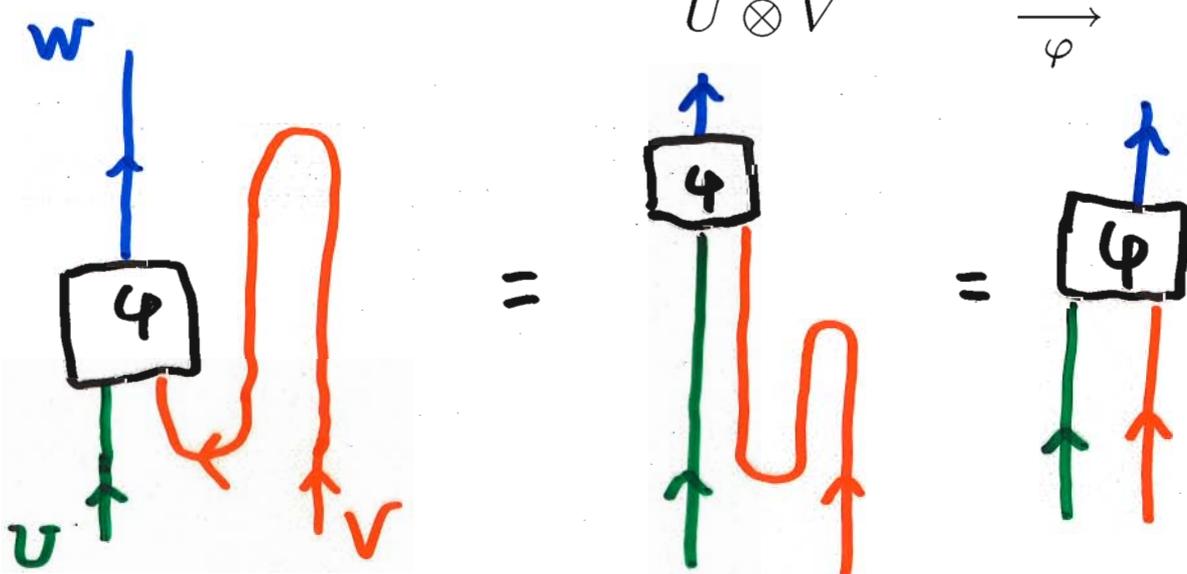
$\varphi \in \text{Hom}(U, W \otimes V^*)$  に対し,  $\text{Hom}(U \otimes V, W)$  の元を

$$U \otimes V \xrightarrow{\varphi \otimes 1} W \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{1 \otimes e} W \quad \text{と定める.}$$

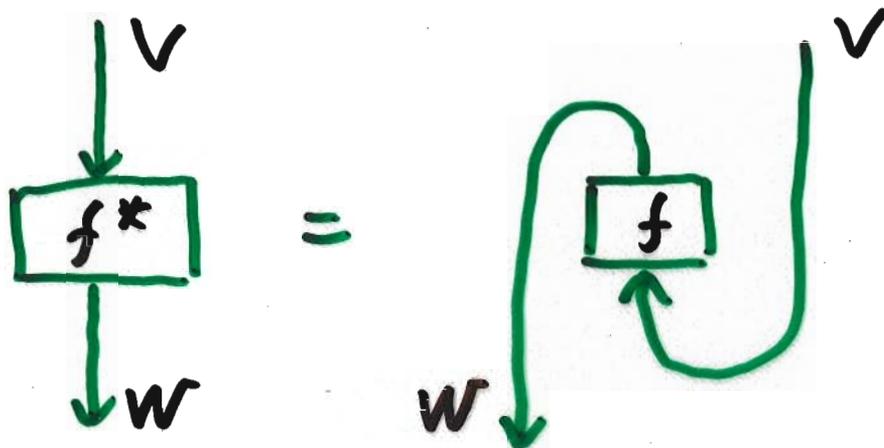
下記よりこれらは互いに逆対応になっている.

$$U \otimes 1 \otimes V \xrightarrow{1 \otimes i \otimes 1} U \otimes V \otimes V^* \times V \xrightarrow{\varphi \otimes 1} W \otimes V^* \otimes V$$

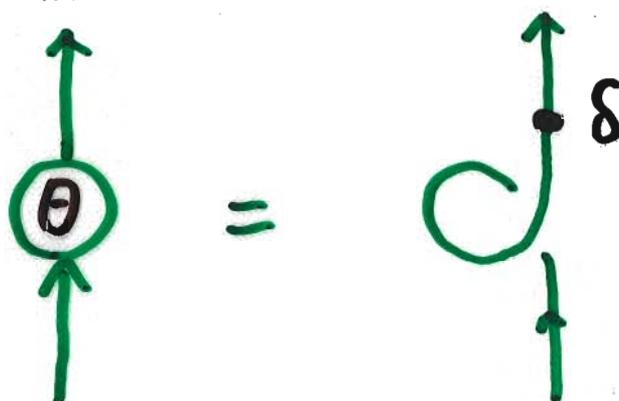
$$\begin{array}{ccc} \searrow 1 & \downarrow e & \searrow 1 \otimes e \\ & U \otimes V & W \end{array}$$



dual morphism の構成



twist  $\theta$  の構成



**Theorem.** (Reshetikhin-Turaev)

Ribbon cat. では図としてあらわしたときに同値になる morphism は等しい.

## Semisimple Category

$U$

$U$  が simple object とは, 単射  $V \rightarrow U$  が 0 写像または同型写像となること.

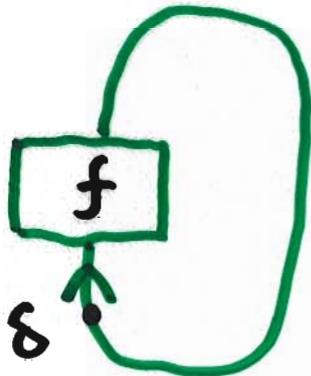
カテゴリー  $\mathcal{C}$  が semisimple とは, 任意の object が simple objects  $V_i (i \in I)$  の直和になっていること.

simple object  $V_i, V_j$  に対し,

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_{k \in I} N_{ij}^k V_k$$

と simple object に分解される. ( $N_{ij}^k$  : 重複度)

$\text{tr } f =$



$d_i = \dim V_i =$



Simple obj.  $U$

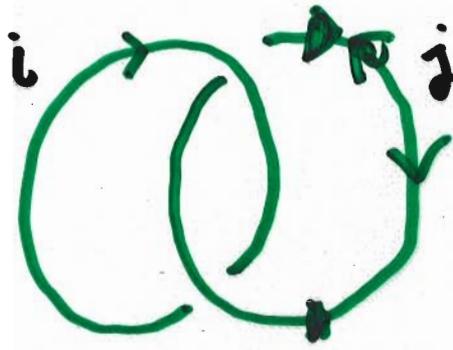
$V \hookrightarrow U$  0 or isom.

$$\text{End}(U) = k$$

# Modular Tensor Category

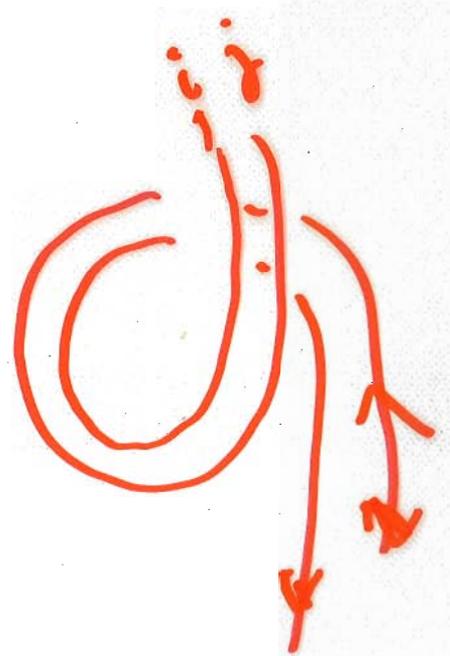
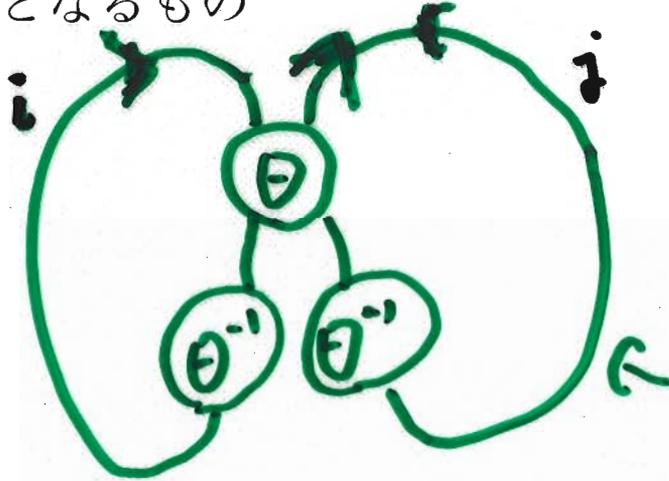
(有限個の simple obj. からなる半単純 ribbon cat. で)

$$\tilde{s}_{ij} =$$



が可逆行列となるもの

$$\tilde{s}_{ij} =$$



$$= \theta_i^{-1} \theta_j^{-1} \text{tr } \theta_{V_i^* \otimes V_j} = \theta_i^{-1} \theta_j^{-1} \sum_{k \in I} N_{ij}^k \theta_k d_k$$

記法

Obj. の指定されていない線は

$$\sum_{i \in I} d_i \times (i \text{ をその線に指定した図})$$

と解釈する。

例  $(d_i, \sum_i d_i^2)$

$$i \downarrow \bigcirc = d_i \cdot \bar{i} \downarrow \bigcirc = \sum_i d_i^2$$

Lemma

$$H_j \# V_i = \frac{\tilde{s}_{ij}}{d_i} V_i,$$

$$\bar{i} \downarrow \bigcirc = \frac{\tilde{s}_{ij}}{d_i} \downarrow_i$$

$$H^\theta \# V_i = p^+ V_i^{\theta^{-1}},$$

$$\theta \downarrow \bigcirc = p^+ \bigcirc \theta^{-1} \downarrow_i$$

$$H^{\theta^{-1}} \# V_i = p^- V_i^\theta,$$

$$\theta^{-1} \downarrow \bigcirc = p^- \bigcirc \theta \downarrow_i$$

$$(p^\pm = \sum_{i \in I} \theta_i^{\pm 1} d_i^2)$$

## Modularity

$$t_{ij} = \delta_{ij} \theta_i, \quad c_{ij} = \delta_{ij}^*$$

とおくと

$$(\tilde{s}t)^3 = p^+ \tilde{s}^2, \quad (\tilde{s}t^{-1})^3 = p^- \tilde{s}^2 c,$$

$$ct = tc, \quad c\tilde{s} = \tilde{s}c, \quad c^2 = 1.$$

さらに,  $\tilde{s}$  が可逆なことより

$$\tilde{s}^2 = p^+ p^- c.$$

$$D = \sqrt{p^+ p^-}, \quad \zeta = \left( \frac{p^+}{p^-} \right)^{1/6} \text{ とし, } s_{ij} = \frac{\tilde{s}_{ij}}{D} \text{ とすると}$$

$$(st)^3 = \zeta^3 s^2, \quad s^2 = c, \quad ct = tc, \quad c^2 = 1.$$

$$(SL(2, \mathbb{Z}) \text{ の射影表現 : } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow s, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow t)$$

# Verlinde Formula

## Theorem.

$$N_{ij}^k = \sum_r \frac{s_{ir} s_{jr} s_{k^*r}}{s_{0r}} \left( = \sum_r \frac{\tilde{s}_{ir} \tilde{s}_{jr} \tilde{s}_{k^*r}}{p^+ p^- d_r} \right)$$

Proof.

$$F(I) = k \{I \rightarrow k\} = \bigoplus_{i \in I} k \varepsilon_i \quad (\text{特性関数})$$

$$\mu : K(\mathcal{C}) \rightarrow F(I) : k\text{-alg. hom.}$$

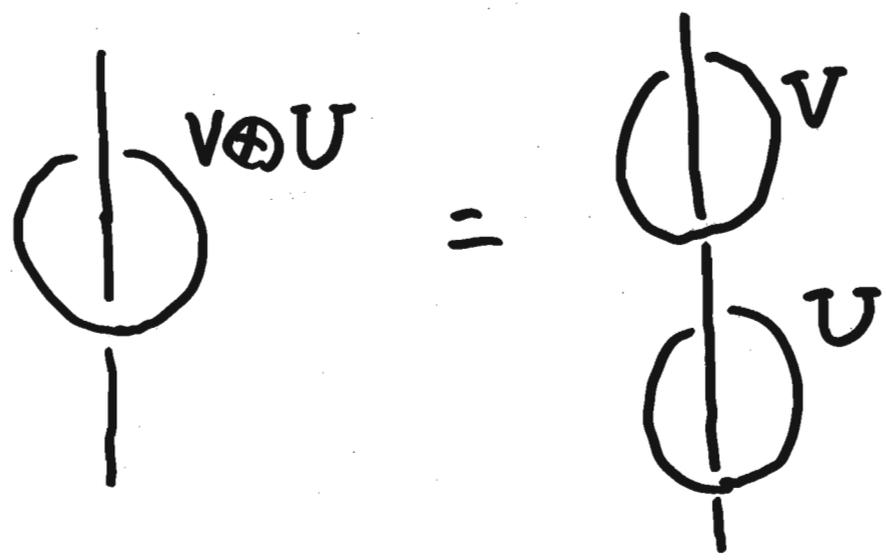
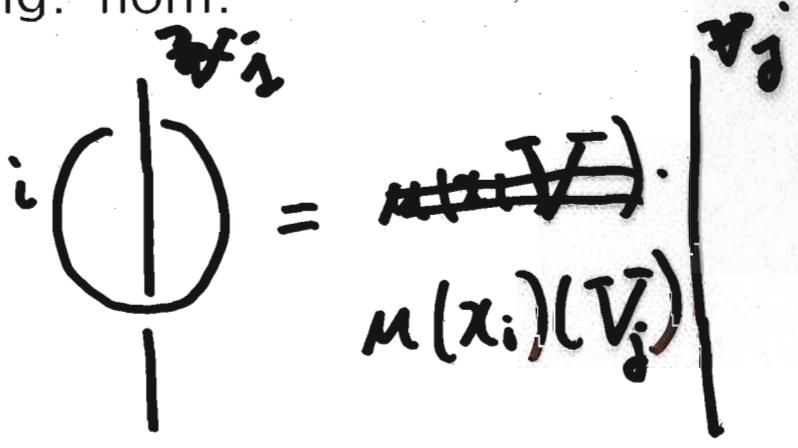
$$\mu(x_i) = \sum_j \frac{\tilde{s}_{ij}}{d_j} \varepsilon_j$$

$$x_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \frac{\tilde{s}_{ij}}{d_j}$$

$$x_i x_j = \sum_p N_{ij}^p x_p$$

$$\frac{\tilde{s}_{ir} \tilde{s}_{jr}}{d_r} = \sum_p N_{ij}^p \tilde{s}_{pr}$$

$$\sum_r \frac{\tilde{s}_{ir} \tilde{s}_{jr} \tilde{s}_{k^*r}}{d_r} = \sum_p N_{ij}^p \sum_r \tilde{s}_{pr} \tilde{s}_{rk^*} = \sum_p N_{ij}^p D \delta_{pk}$$



## 2. 3D TQFT

### データ

- 境界のない曲面  $N \longrightarrow \tau(N)$  ベクトル空間
- 3次元多様体  $M \longrightarrow \tau(M) \in \tau(\partial M)$  ベクトル
- $f : N \rightarrow N'$  同相 に対し  $f_* : \tau(N) \rightarrow \tau(N')$  同型
- functorial isomorphisms

$$\tau(\bar{N}) \xrightarrow{\sim} \tau(N)^*, \quad \tau(\phi) \xrightarrow{\sim} k,$$

$$\tau(N_1 \sqcup N_2) \xrightarrow{\sim} \tau(N_1) \otimes \tau(N_2).$$

( $\bar{N}$  :  $N$  の向き付けを逆にしたもの)

## 公理

$\tau$  は次をみたす.

- **Functoriality**

$$f : M \xrightarrow{\sim} M' \text{ に対し } (f|_{\partial M})_* (\tau(M)) = \tau(M').$$

- **Gluing**

境界の張り合わせが morphism の合成に対応する.

- **Normalization**

$$\tau(N \times [0, 1]) = id_{\tau(N)}$$

$$\tau(S^2) = k, \quad \tau(B^3) = 1 \in k.$$

## 自明な例

- $\partial M = N_1 \sqcup \overline{N_2}$  のとき,  
 $\tau(M) \in \tau(N_1) \otimes \tau(\overline{N_2}) \cong \text{Hom}(\tau(N_1), \tau(N_2))$ .
- $\tau(N \times S^1) = \text{tr } \tau(N \times [0, 1]) = \dim \tau(N)$ .

## 性質



- $(fg)_* = f_* g_*$ ,  $id_* = id$
- $f : N_1 \xrightarrow{\sim} N_2$  に対し,  $f_* : \tau(N_1) \xrightarrow{\sim} \tau(N_2)$  は  $f$  の isotopy class にのみよる.  
 (公理 normalization による)

## MTC による 3D TQFT の構成

任意の境界のない 3次元多様体  $M$  は,  $S^3$  内のある framed link に沿った surgery で得られる.

$$\text{framed link } L \xrightarrow{\text{MTC}} \tau(L) \in k$$

$\tau(L)$  は  $M$  の不変量となる (Reshetikhin-Turaev)

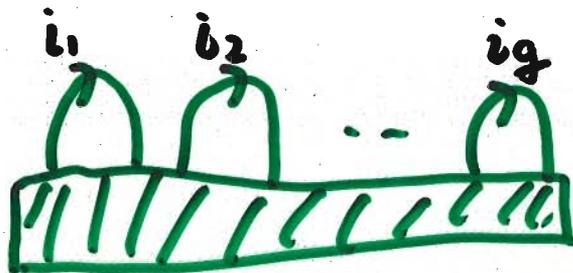
境界のあるときは, handle body を張り合わせて境界のない多様体にし,  $S^3$  中の framed link で表現する.

genus  $g$  の handle body  $H_g$  を coupon と  $g$  本の loop であらわし,

$$\tau(H_g) := \bigoplus_{i_j \in I} k \left( \bigotimes_{j=1}^g V_{i_j} \otimes V_{i_j}^* \right)$$

とする.

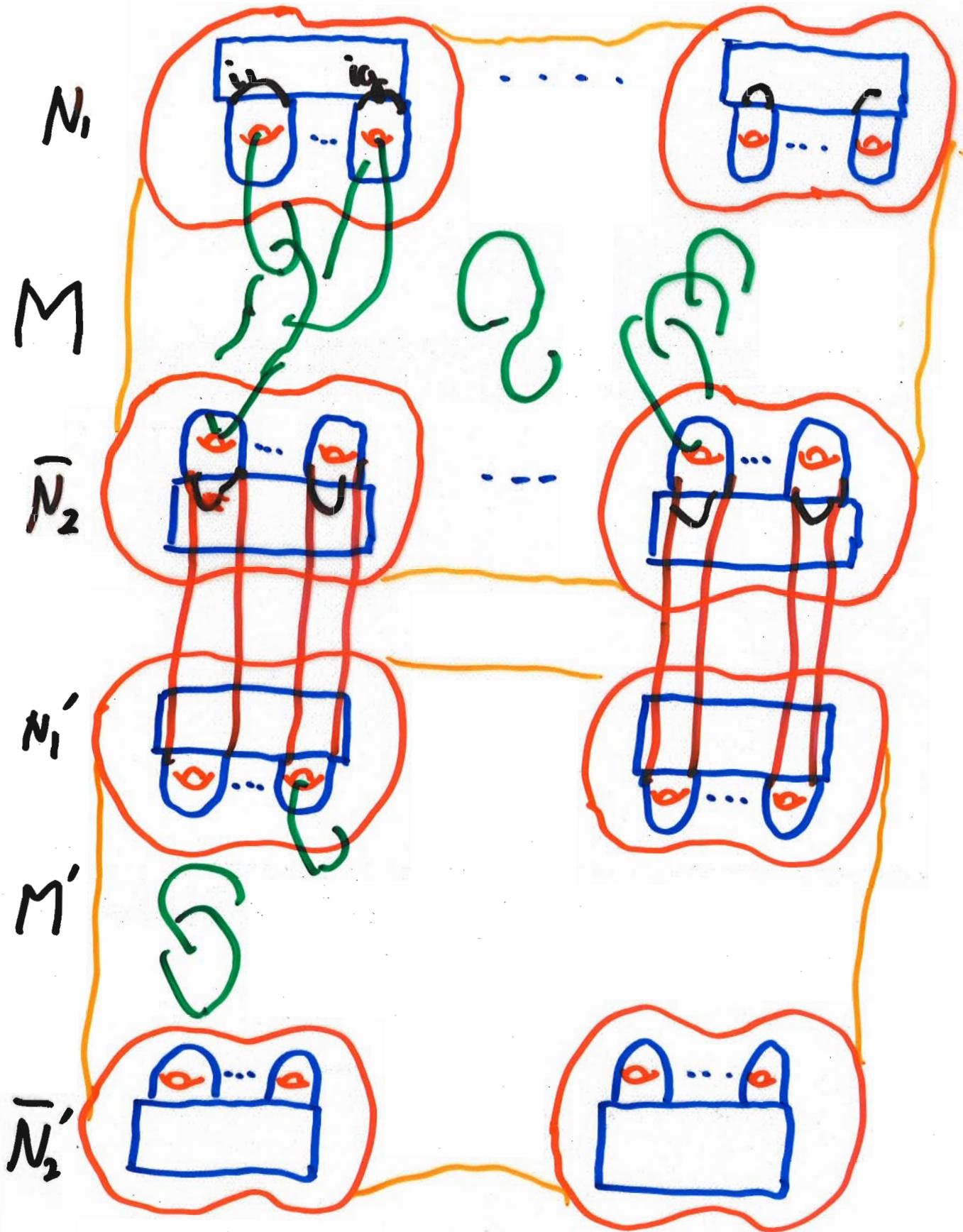
$\tau(H_g)$



$H_g$



張り合わせ



## 典型的な例

- Reshetikhin-Turaev 不変量 (Jones 不変量)  
( $\mathcal{U}_q(sl_2)$ ,  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$  に対応)  
framing anomaly のため, 実際はもう少し複雑
- 一般化

## 変わった例

- LMO (Le-M.-Ohtsuki) 不変量による TQFT  
(M.-Ohtsuki)  
Jacobi 図の空間を用いる.  
テンソル積の意味が変わってくる.  
grading が入り, 全体では無限次元になる.
- ADO (Akutsu-Deguchi-Ohtsuki) 不変量  
 $\mathcal{U}_q(sl_2)$  at  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$  の  
最低 weight 表現に対応  
Alexander 多項式の一般化

### 3. ADO 不変量

最低ウェイト表現  $q = \exp \pi \sqrt{-1}/N$

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) = \left\langle K, X, Y \mid \begin{aligned} K X K^{-1} &= q X, \\ K Y K^{-1} &= q^{-1} Y, \\ [X, Y] &= \frac{K^2 - K^{-2}}{q - q^{-1}} \end{aligned} \right\rangle.$$

$$V_\lambda = \langle v_0, v_1, \dots, v_{N-1} \rangle,$$

$$\begin{aligned} X v_i^\lambda &= [i + 1] v_{i+1}^\lambda, & Y v_i^\lambda &= [\lambda - i] v_{i-1}^\lambda, \\ K v_i^\lambda &= q^{-\frac{\lambda-1}{2} + i} v_i^\lambda. \end{aligned}$$

$$[a] = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}, \quad [n]! = \prod_{i=1}^n [i] \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

次の記号も用いる.

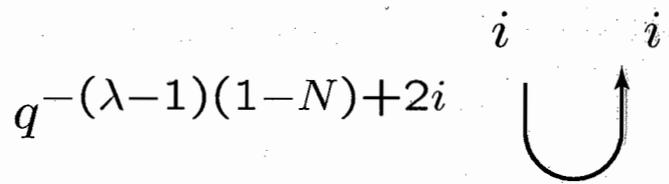
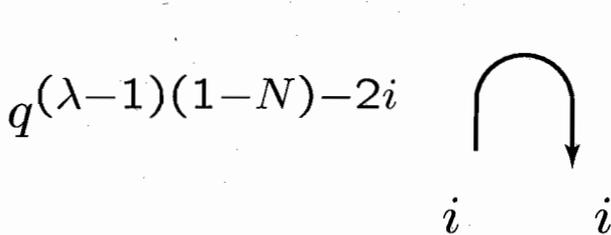
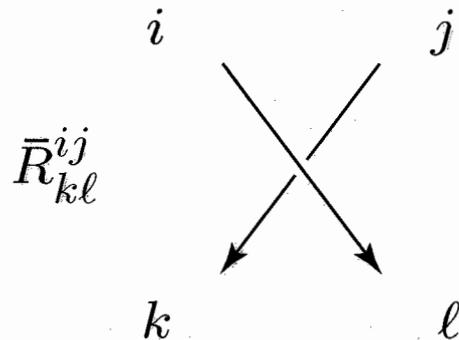
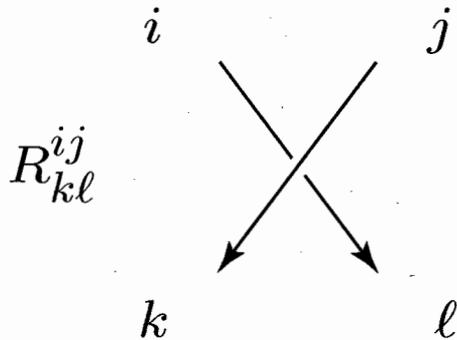
$$(a)_q = q^a - q^{-a}, \quad \frac{(a+n)_q!}{(a)_q!} = \prod_{i=1}^n (a+i)_q \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

## R-行列など

$$\begin{aligned}
 R \cdot (v_i^\lambda \otimes v_j^\mu) = & \\
 \sum_n q^{2(\frac{\lambda-1}{2} + N - i)(\frac{\mu-1}{2} - j) + n(\frac{\lambda-1}{2} - \frac{\mu-1}{2} - i + j) - \frac{n(n+1)}{2}} \times & \\
 \frac{(q - q^{-1})^n}{[n]!} \frac{[i + n]!}{[i]!} \frac{[\mu - j + n - 1]!}{[\mu - j - 1]!} (v_{j-n}^\mu \otimes v_{i+n}^\lambda), &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^{-1} \cdot (v_i^\lambda \otimes v_j^\mu) = \sum_n (-1)^n \times & \\
 q^{-2(\frac{\lambda-1}{2} - i)(\frac{\mu-1}{2} + N - j) + n(\frac{\lambda-1}{2} - \frac{\mu-1}{2} - i + j) + \frac{n(n+1)}{2}} \times & \\
 \frac{(q - q^{-1})^n}{[n]!} \frac{[j + n]!}{[j]!} \frac{[\lambda - i + n - 1]!}{[\lambda - i - 1]!} (v_{j+n}^\mu \otimes v_{i-n}^\lambda). &
 \end{aligned}$$

$$R \cdot (v_i^\lambda \otimes v_j^\mu) = \sum_{k,l} R_{kl}^{ij} (v_k^\mu \otimes v_l^\lambda),$$



**Theorem.** (Akutsu-Deguchi-Ohtsuki)

ある  $(\lambda$  が assign された) 成分でタングルに切り開き,  
 タングルに対応するスカラーを求め,  $d_\lambda = \frac{(\lambda)_q}{(N \lambda)_q}$  をかけ  
 ると, link の不変量になる.

$$\frac{q^\lambda - q^{-\lambda}}{q^{N\lambda} - q^{-N\lambda}}$$

## Modularity

- twist  $t_\lambda = q^{\frac{\lambda^2-1}{2}}$  倍する.

- Hopf link  $\tilde{s}_{\lambda\mu} = \sqrt{-1}^{-(N-1)} q^{-\lambda\mu}$

表現の assign されていない成分については,  $\lambda$  を assign し,  $d_\lambda$  をかけて  $\mathbb{R}$  上  $\lambda$  で積分したものとする.  
 $t$  や  $s$  の積も  $\mathbb{R}$  上の積分で定義する.

### Theorem.

$s$  と  $t$  の作用により,  $\mathbb{R}$  上の関数の空間への  $SL(2, \mathbb{Z})$  の射影表現が定義される.

$$t.f(x) = q^{(x^2-1)/2} f(x), \quad s.f(x) = c \int_{y \in \mathbb{R}} q^{xy} f(y) \text{ (Fourier 変換)}$$

## Verlinde Formula

$$N_{ij}^k = \sum_r \frac{\tilde{s}_{ir} \tilde{s}_{jr} \tilde{s}_{k^*r}}{p^+ p^- d_r}$$

ADO では  $p^+ p^- = 1$  であり, 和は  $\mathbb{R}$  上の積分とする.

$$\begin{aligned} N_{\lambda\mu}^\nu &= \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{\tilde{s}_{\lambda x} \tilde{s}_{\mu x} \tilde{s}_{(N-\nu-2)x}}{d_x} dx \\ &= c \int_{x \in \mathbb{R}} q^{-(\lambda+\mu+N-\nu-2)x} (q^{(N-1)x} + q^{(N-3)x} + \dots + q^{(-N+1)x}) dx \\ &= c \int_{x \in \mathbb{R}} q^{-(\lambda+\mu-\nu+2N-3)x} + q^{-(\lambda+\mu-\nu+2N-5)x} + \dots + q^{-(\lambda+\mu-\nu-1)x} dx \\ &= \begin{cases} 1 & \nu = \lambda + \mu - (2i + 1) \quad (i = 0, 1, \dots, N - 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

テンソル表現の分解則と一致する.

## まとめ

- MTC から得られるもの  
結び目や3次元多様体の不変量  
3D TQFT  
写像類群の表現, Modular functor, CFT
- MTC の欠点  
有限性, 半単純性という強い制約条件  
数論に通じる困難がある.  
量子群では非常にうまくいった.  
作用素環からのアプローチもある.
- MTC の条件をうまく緩めて, より広く応用できる扱い  
やすい理論を構成したい.  
例 LMO, ADO