

双曲四面体の体積の公式と 量子 6j-symbol

大阪大学大学院理学研究科

八野 正和

1 序

R.M.Kashaev は体積予想なるものを提起した [2]. これは, 双曲結び目に対して, その結び目の量子不変量のある種の極限が, 結び目の補空間の双曲体積になるというものである. [2] には 3 つの双曲結び目について, 数値的なものも含めて確かめられている. この予想により, 双曲幾何と量子不変量との間に直接的な関係があることが示唆された.

以下に述べる 3 つのことから, Kashaev [2] と同じ手法を用いることによって, 量子 6j-symbol のある種の極限が, 双曲四面体の体積を与えるのではないかと考えた.

- (1) 量子 6j-symbol は Pentagon 関係式とよばれる 5 項間の関係式を満たす. これは双曲幾何において, 多面体の体積の公式を与える際に現れる dilogarithm 関数にも成り立つ関係式である.
- (2) J.Roberts [6] によって, リー環 sl_2 の表現から定義される古典的 6j-symbol が, ユークリッド空間における四面体と関係していることが示されている.
- (3) 量子 6j-symbol は $U_q(sl_2)$ の表現から定義される量で, この量から四面体分割を用いることによって, Turaev-Viro 不変量とよばれる 3 次元多様体の量子不変量を構成することができる. これは Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量 (WRT 不変量) とよばれる 3 次元多様体の量子不変量の絶対値の 2 乗と一致することが知られている [7]. この WRT 不変量について, H.Murakami [4] は, 任意の 3 次元閉多様体 M とその 1 の原始 N 乗根に対応する WRT 不変量 $\tau_N(M)$ に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi\sqrt{-1} \log \tau_N(M)}{N} = CS(M) + \sqrt{-1} \text{Vol}(M)$$

が成り立つことを予想している。ここで、 $o\text{-lim}$ とは [4] で定義されている optimistic limit とよばれる極限で、 $CS(M)$ は M の Chern-Simons 不変量、 $\text{Vol}(M) = v_3 \|M\|$ ($\|M\|$ は M の simplicial volume、 v_3 は理想正四面体の双曲体積) である。ゆえに、Turaev-Viro 不変量は Vol と関係があるのではないかと考えられる。

これらのことから量子 6j-symbol と双曲四面体とが何らかの関係があるのではないかと期待した。

量子 6j-symbol の漸近展開において、鞍点法が適用できると仮定して、極限の計算を進めた結果、双曲四面体の体積が現れ、四面体の頂点の置換に関して対称な体積の公式を得た (定理 1, 2)。

まず、Turaev-Viro [8] に与えられている量子 6j-symbol の公式に、Kashaev [2] と同様の方法を用いて式変形を行った。その結果、dilogarithm 関数を被積分関数に含む積分が現れ、その被積分関数の鞍点を調べてみると、鞍点を与える方程式が 2 次方程式に帰着されることが分かった。積分の極限值が 1 つの鞍点における値でほとんど近似されると仮定した上で数値実験を進めてみると、鞍点の一方を採用した場合、量子 6j-symbol のある種の極限值として双曲四面体の体積が現れ、もう一方の鞍点を採用した場合には同じ双曲四面体の体積に -1 倍したものが現れた。この結果から体積の新公式 (定理 1, 2) を予想し、量子 6j-symbol と双曲四面体との間の関係式として、

$$\frac{\pi}{N} \log \left| \begin{Bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{Bmatrix} \right| \sim \text{Vol} T \left(\left(\frac{2ak}{N} - 1 \right) \pi, \dots, \left(\frac{2fk}{N} - 1 \right) \pi \right)$$

が成り立つことを予想した。

量子 6j-symbol から導いた体積の新公式が、真に双曲四面体の体積を与えていることは、Cho-Kim [1] に示されている一般の双曲四面体の体積の公式と、面角に関する微分が一致することによって示した。

しかし、量子 6j-symbol と双曲四面体との関係については、鞍点法の適用に際して、特異点が存在するために、積分経路を正則な範囲で動かして、鞍点を通る経路に変形できないことが分かり、量子 6j-symbol のある種の極限值と四面体の体積とは対応していないことが分かった。

だが、量子 6j-symbol の研究の中で、実際に新しい双曲四面体の体積の公式が導かれたことから、私が予想した関係式と類似した関係が、量子 6j-symbol を定義を見直すことによって成り立つのではないかと期待される。

なお、本論文の構成は次のようになっている。

2 章 双曲四面体の新しく導かれた体積公式 (定理 1, 2, 3) と球面的四面体の体積公式 (定理 4) について述べた。量子 6j-symbol から直接導

かれた公式は定理 2 である. 2 つの鞍点に対して正と負の体積が現れるが, これは四面体の向きが 2 つあることに対応しているものと考えられる. 2 つの鞍点に対して正負の体積が現れるので, その差をとって体積の公式として与えたのが定理 1 である.

3 章 理想四面体の体積公式について述べた. 理想四面体とは 4 つの頂点すべてが無限遠にあるような四面体のことである. この場合について, 新しい公式がよく知られた公式と一致することを確かめた.

4 章 定理 1, 2, 3, 4 の証明について述べた. Cho-Kim [1] の体積の公式と比較して, 面角に関する微分が一致することによって定理 1 を, さらに定理 1 を用いて定理 2 を証明した. 定理 1 の証明において数式処理ソフト (Mathematica) を用いた部分は付録に示した. 定理 3 は分枝を適当に選べば微分が消えることで示した. 定理 4 は定理 3 と Vinberg の命題による.

5 章 双曲四面体と量子 6j-symbol との関係について述べた. 鞍点法を適用できるとして量子 6j-symbol の漸近展開を行った結果, 双曲四面体の体積が現れることを, 具体的な計算で示した.

謝辞 修士論文を作成するにあたり, 多大な御指導を下さいました村上順先生に深く感謝するとともに, 双曲幾何に関する多くの助言を下さいました東工大の牛島先生に御礼申し上げます.

2 双曲四面体の体積の新公式

この論文中, 3 次元双曲空間を $\mathbf{H}^3$, 3 次元ユークリッド空間を $\mathbf{E}^3$, 3 次元球面的空間を $\mathbf{S}^3$ で表す.

$T = T(A, B, C, D, E, F)$ を $\mathbf{H}^3$, $\mathbf{E}^3$, $\mathbf{S}^3$ のいずれかの空間中で実現される, 面角が A, B, C, D, E, F の四面体とする. ただし, A, B, C をある頂点に集まる 3 辺に対応する面角とし, A, B, C の対辺に対応する面角をそれぞれ D, E, F とする (図 1).

$a = \exp \sqrt{-1}A, b = \exp \sqrt{-1}B, \dots, f = \exp \sqrt{-1}F$ とおく. さらに,

$$U(z, T) = \frac{1}{2}(\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(zabde) + \text{Li}_2(zacdf) + \text{Li}_2(zbcef) \\ - \text{Li}_2(-zabc) - \text{Li}_2(-zaef) - \text{Li}_2(-zbd f) - \text{Li}_2(-zcde)) \quad (2.1)$$

とおく.

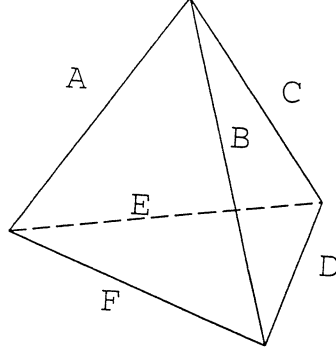


図 1: 四面体 $T(A, B, C, D, E, F)$

ここで $\text{Li}_2(x)$ は次の積分で与えられた関数を解析接続することによって定義される dilogarithm 関数である.

$$\text{Li}_2(x) := - \int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt, \quad x \text{ は正の実数} \quad (2.2)$$

$\text{Li}_2(z)$ と書けば特に断らない限り $\text{Li}_2(0) = 0$ なる分枝を表すことにする.

方程式

$$\frac{d}{dz} U(z, T) = \frac{\pi \sqrt{-1}}{z} k \quad (k \in \mathbf{Z}) \quad (2.3)$$

の自明でない 2 つの解を z_1, z_2 とする. さらに,

$$\begin{aligned} \Delta(T) &= \tilde{\Delta}(a, b, c) + \tilde{\Delta}(a, e, f) + \tilde{\Delta}(b, d, f) + \tilde{\Delta}(c, d, e) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\log(-a) \log(-d) + \log(-b) \log(-e) + \log(-c) \log(-f)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

とおく. ここで,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(a, b, c) &= -\frac{1}{4}(\text{Li}_2(-abc^{-1}) + \text{Li}_2(-ab^{-1}c) + \text{Li}_2(-a^{-1}bc) + \text{Li}_2(-a^{-1}b^{-1}c^{-1}) \\ &\quad - (\log(-a))^2 - (\log(-b))^2 - (\log(-c))^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

である. そして,

$$V_1(T) = U(z_1, T) + \Delta(T) \quad (2.6)$$

$$V_2(T) = U(z_2, T) + \Delta(T) \quad (2.7)$$

$$V(T) = \frac{U(z_1, T) - U(z_2, T)}{2} \quad (2.8)$$

とおく.

$\text{Vol}(T)$ を T の $\mathbf{H}^3$, $\mathbf{E}^3$, $\mathbf{S}^3$ における体積とすると, 次の定理を得た.

定理 1 T が $\mathbf{H}^3$ 内で実現される双曲四面体であるとき, その双曲体積 $\text{Vol}(T)$ は次で与えられる.

$$\text{Vol}(T) = \text{Im } V(T) \quad (2.9)$$

定理 2 T が双曲四面体であるとき, その双曲体積 $\text{Vol}(T)$ は次で与えられる.

$$\text{Vol}(T) = \text{Im } V_1(T) = -\text{Im } V_2(T) \quad (2.10)$$

定理 3 T は双曲四面体であるとする. $U(z, T)$ に関して適当な分枝をとれば,

$$\text{Re } V(T) = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{特に, } \text{Vol}(T) = -\sqrt{-1}V(T) \quad (2.12)$$

が成り立つ.

定理 4 T は $\mathbf{S}^3$ 内で実現される球面的四面体であるとする. $U(z, T)$ の適当な分枝をとれば,

$$\text{Vol}(T) = V(T) \quad (2.13)$$

が成り立つ.

2.1 $\mathbf{H}^3, \mathbf{E}^3, \mathbf{S}^3$ における四面体

$T=T(A, B, C, D, E, F)$ に対して,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

を T の Gram 行列といい, $\text{Gram}(T)$ で表す.

さらに, M_-, M_0, M_+, M を次のように定義する.

$$M_- := \{(A, B, C, D, E, F) \in (0, \pi)^6 \mid \\ T(A, B, C, D, E, F) \text{ が } \mathbf{H}^3 \text{ 内の有界な四面体} \}$$

$$M_0 := \{(A, B, C, D, E, F) \in (0, \pi)^6 \mid \\ T(A, B, C, D, E, F) \text{ が } \mathbf{E}^3 \text{ 内の四面体}\}$$

$$M_+ := \{(A, B, C, D, E, F) \in (0, \pi)^6 \mid \\ T(A, B, C, D, E, F) \text{ が } \mathbf{S}^3 \text{ 内の四面体}\}$$

$$M := M_- \cup M_0 \cup M_+$$

次の命題が知られている.

命題 (Vinberg[9]) $\alpha \in (0, \pi)^6$ に対して,

$$\begin{aligned} \alpha \in M_- &\iff \text{Gram}(T(\alpha)) \text{ の符号数が } (3, 1) \text{ であつ,} \\ &\quad \text{そのすべての余因子が正} \\ \alpha \in M_0 &\iff \text{Gram}(T(\alpha)) \text{ の符号数が } (3, 0) \\ \alpha \in M_+ &\iff \text{Gram}(T(\alpha)) \text{ が正定値} \end{aligned}$$

特に, $\alpha \in M_-, M_0, M_+$ のとき, $\det \text{Gram}(T(\alpha)) <, =, > 0$ である.
さらに, $T = T(A, B, C, D, E, F)$ が $\mathbf{H}^3$ 内の四面体で, 少なくとも 1 つ
の頂点が無限遠にあるとき,

$(A, B, C, D, E, F) \in \partial M_-$ で, $\text{Gram}(T)$ は符号数 $(3, 1)$ をもち,
 $\text{Gram}(T)$ の非対角成分における余因子はすべて正,
対角成分における余因子はすべて非負で少なくとも 1 つは 0 である.

2.2 z_1, z_2 を与える 2 次方程式

方程式 $dU/dz = \pi\sqrt{-1}k/z$ について調べる. dU/dz を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}U(z, T) = & \\ -\frac{1}{2z}(\log(1-z) + \log(1-abdez) + \log(1-acdfz) + \log(1-bcefz) \\ & - \log(1+abcz) - \log(1+ae fz) - \log(1+bd fz) - \log(1+cdez)) \end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$\begin{aligned} dU(z, T)/dz = \pi\sqrt{-1}k/z &\iff \\ \log(1-z) + \log(1-abdez) + \log(1-acdfz) + \log(1-bcefz) = & \\ \log(1+abcz) + \log(1+ae fz) + \log(1+bd fz) + \log(1+cdez) - 2\pi\sqrt{-1}k & \end{aligned}$$

である。上の方程式の任意の解は次の方程式を満たす；

$$(1-z)(1-abdez)(1-acdfz)(1-bcefz) - (1+abcz)(1+ae fz)(1+bd fz)(1+cdez) = 0$$

この方程式は z に関する定数項が 0 である。そこで、

$$f(z, T) = -\frac{1}{z}((1-z)(1-abdez)(1-acdfz)(1-bcefz) - (1+abcz)(1+ae fz)(1+bd fz)(1+cdez)) \quad (2.14)$$

とおくと、 z に関する 3 次の項の係数が 0 なので、方程式

$$f(z, T) = 0 \quad (2.15)$$

は z に関する 2 次方程式である。 z_1, z_2 とはこの 2 次方程式の解である。

今、 $f(z, T)$ の次数 0, 1, 2 の係数をそれぞれ α, β, γ とする。すなわち

$$\alpha = 1 + abc + abde + cde + bdf + acdf + aef + bcef$$

$$\begin{aligned} \beta = & -abde + abc^2de - acdf + ab^2cdf - bcef + a^2bcef \\ & + bcd^2ef - a^2bcd^2ef + acde^2f - ab^2cde^2f + abdef^2 - abc^2def^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma = & a^2bcd^2ef + ab^2c^2d^2ef + ab^2cde^2f + a^2bc^2de^2f + a^2b^2cde f^2 \\ & + abc^2def^2 + abcd^2e^2f^2 + a^2b^2c^2d^2e^2f^2 \\ = & (abcdef)^2 \bar{\alpha} \end{aligned}$$

である。

補題 T が双曲四面体であるとき、方程式 $f(z, T) = 0$ の解 z_1, z_2 の絶対値は 1 である。

証明 面角 $A, B, \dots, F$ から定まるパラメータ $a, b, \dots, f$ に対して、 $\alpha \neq 0$ が成り立つと仮定する。このとき、 $\gamma \neq 0$ である。 $f(z, T) = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

である。

T が双曲四面体であることから、

$$\det \text{Gram}(T) < 0$$

が成り立つ.

$$a = \exp \sqrt{-1}A, \dots, f = \exp \sqrt{-1}F \text{ なので,}$$

$$\det \text{Gram}(T) = \begin{vmatrix} 1 & -(a+a^{-1})/2 & -(b+b^{-1})/2 & -(f+f^{-1})/2 \\ -(a+a^{-1})/2 & 1 & -(c+c^{-1})/2 & -(e+e^{-1})/2 \\ -(b+b^{-1})/2 & -(c+c^{-1})/2 & 1 & -(d+d^{-1})/2 \\ -(f+f^{-1})/2 & -(e+e^{-1})/2 & -(d+d^{-1})/2 & 1 \end{vmatrix}$$

となる. これを実際に計算すると,

$$D = 16(abcdef)^2 \det \text{Gram}(T) \quad (2.16)$$

が成り立つ. $(abcdef)^2/\alpha\gamma = 1/|\alpha|^2 > 0$ だから, $\det \text{Gram}(T) < 0$ より $\frac{\beta^2}{\alpha\gamma} - 4 < 0$ が成り立つ. ゆえにこのとき方程式 $f(z, T) = 0$ の解 z_1, z_2 は

$$z_1, z_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha\gamma} - 4} \right)$$

だから, $\left| \frac{\alpha}{\gamma} \right| = \left| \frac{1}{(abcdef)^2} \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right| = 1$, および, $\left| \frac{1}{2} \left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha\gamma} - 4} \right) \right| = 1$ より, $|z_1| = |z_2| = 1$ となる.

今 $\alpha \neq 0$ を満たすパラメータは存在する. 一方で, あるパラメータ $(A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0)$ に対して $\alpha = 0$ となったとする. このとき, $\gamma = 0$ だから, 方程式 $f(z, T) = \beta z = 0$ は解 $z = 0$ をもつ. しかし $(A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0)$ の近傍には $\alpha \neq 0$ となるパラメータが存在するので, 上の議論より, そのパラメータについては $|z| = 1$ である. これは, 方程式 $f(z, T) = 0$ の解 z に対して, $|z|$ が (A, B, C, D, E, F) に関して連続であることに矛盾する. ゆえに常に $\alpha \neq 0$ である. **証明終**

Remark この補題から T が双曲四面体のときは (2.6), (2.7), (2.8) に現れる関数 Li_2 の括弧の中はすべて絶対値が 1 である.

2.3 Lobachevsky 関数

3次元双曲空間 $\mathbf{H}^3$ 内の多面体の体積はその面角の Lobachevsky 関数で表される. Lobachevsky 関数 $\Lambda(x)$ は次の積分によって定義される;

$$\Lambda(x) := - \int_0^x \log |2 \sin t| dt, (x \in \mathbf{R}) \quad (2.17)$$

$\Lambda(x)$ は周期 π の奇関数であって, $n\pi/2$ で 0, $n\pi+\pi/6$ で最大値, $n\pi-\pi/6$ で最小値をとる.

dilogarithm 関数と Lobachevsky 関数の間には次の関係が成り立つ [3];

$$\operatorname{Im} \operatorname{Li}_2(\exp \sqrt{-1}x) = 2\Lambda\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.18)$$

前節の Remark から $V(T)$, $V_1(T)$, $V_2(T)$ を次のように書き直すことができる.

$Z_1 = \arg z_1$, $Z_2 = \arg z_2$, $W_1 = A + B + C - \pi$, $W_2 = A + E + F - \pi$, $W_3 = B + D + F - \pi$, $W_4 = C + D + E - \pi$ とおく.

$$\begin{aligned} U_\Lambda(T, Z) &= \Lambda\left(\frac{Z}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{Z + W_1 + W_4}{2} - C\right) \\ &\quad + \Lambda\left(\frac{Z + W_1 + W_3}{2} - B\right) + \Lambda\left(\frac{Z + W_1 + W_2}{2} - A\right) \\ &\quad - \Lambda\left(\frac{Z + W_1}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z + W_2}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z + W_3}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z + W_4}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\Lambda(T) &= \tilde{\Delta}_\Lambda\left(\frac{W_1}{2}, A, B, C\right) + \tilde{\Delta}_\Lambda\left(\frac{W_2}{2}, A, E, F\right) \\ &\quad + \tilde{\Delta}_\Lambda\left(\frac{W_3}{2}, B, D, F\right) + \tilde{\Delta}_\Lambda\left(\frac{W_4}{2}, C, D, E\right) \end{aligned}$$

とおく. ただし,

$$\tilde{\Delta}_\Lambda(W, A, B, C) = \frac{\Lambda(W) - \Lambda(W - A) - \Lambda(W - B) - \Lambda(W - C)}{2}$$

である.

$$\begin{aligned} V_{1,\Lambda}(T) &= U_\Lambda(T, Z_1) + \Delta_\Lambda(T), \\ V_{2,\Lambda}(T) &= U_\Lambda(T, Z_2) + \Delta_\Lambda(T), \\ V_\Lambda(T) &= \frac{U_\Lambda(T, Z_1) - U_\Lambda(T, Z_2)}{2} \end{aligned}$$

とするとき, 次が成り立つ.

定理 1' T の双曲体積 $\operatorname{Vol}(T)$ は次で与えられる.

$$\operatorname{Vol}(T) = |V_\Lambda(T)| \quad (2.19)$$

定理 2' T の双曲体積 $\operatorname{Vol}(T)$ は次で与えられる.

$$\operatorname{Vol}(T) = |V_{1,\Lambda}(T)| = |V_{2,\Lambda}(T)| \quad (2.20)$$

3 H^3 内の理想四面体の体積

1つの頂点が無限遠にあるとき 頂点 v が無限遠にあるとする. v に集まる3つの面角が A, B, C であるとする. このとき A, B, C は

$$A + B + C = \pi \quad (i.e. \ W_1 = 0)$$

を満たす. このとき,

$$abc = \exp \sqrt{-1}(A + B + C) = \exp \sqrt{-1}\pi = -1$$

である. よって方程式 $f(z, T) = 0$ の解の1つは1である. これを z_1 とすると

$$\begin{aligned} U_\Lambda(T, Z_1) &= U_\Lambda(T, 0) \\ &= \Lambda\left(\frac{W_2}{2} - A\right) + \Lambda\left(\frac{W_3}{2} - B\right) + \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - C\right) - \Lambda\left(\frac{W_2}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{W_3}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{W_4}{2}\right) \end{aligned}$$

だから, T の体積は次で与えられる.

$$\begin{aligned} V_{1,\Lambda}(T) &= \frac{1}{2}(\Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C)) \\ &\quad + \Lambda\left(\frac{W_2}{2} - A\right) - \Lambda\left(\frac{W_2}{2} - E\right) - \Lambda\left(\frac{W_2}{2} - F\right) + \Lambda\left(\frac{W_2}{2}\right) \\ &\quad + \Lambda\left(\frac{W_3}{2} - B\right) - \Lambda\left(\frac{W_3}{2} - D\right) - \Lambda\left(\frac{W_3}{2} - F\right) + \Lambda\left(\frac{W_3}{2}\right) \\ &\quad + \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - C\right) - \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - D\right) - \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - E\right) + \Lambda\left(\frac{W_4}{2}\right) \end{aligned}$$

2つの頂点が無限遠にあるとき $W_1 = W_2 = 0$ と仮定すると, この場合,

$$\begin{aligned} V_{1,\Lambda}(T) &= \frac{1}{2}(\Lambda(B) + \Lambda(C) + \Lambda(E) + \Lambda(F)) \\ &\quad + \Lambda\left(\frac{W_3}{2} - B\right) - \Lambda\left(\frac{W_3}{2} - D\right) - \Lambda\left(\frac{W_3}{2} - F\right) + \Lambda\left(\frac{W_3}{2}\right) \\ &\quad + \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - C\right) - \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - D\right) - \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - E\right) + \Lambda\left(\frac{W_4}{2}\right) \end{aligned}$$

を得る.

3つの頂点が無限遠にあるとき $W_1 = W_2 = W_3 = 0$ と仮定すると, この場合,

$$\begin{aligned} V_{1,\Lambda}(T) &= \frac{1}{2}(\Lambda(C) + \Lambda(D) + \Lambda(E) + 2\Lambda(F)) \\ &\quad + \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - C\right) - \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - D\right) - \Lambda\left(\frac{W_4}{2} - E\right) + \Lambda\left(\frac{W_4}{2}\right) \end{aligned}$$

を得る.

理想四面体の場合 T が理想四面体すなわち、4つの頂点すべてが無限遠にあるとき、 $W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = 0$, $D = A$, $E = B$, $F = C$ である。ゆえに

$$V_{1,\Lambda}(T) = \Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C) \quad (3.1)$$

を得る。これは理想四面体の体積を与えるよく知られた公式である。よって T が理想四面体の場合には定理 2 (2') が成立することが分かった。

Remark 上の事実は T が理想四面体の場合、方程式 $f(z, T) = 0$ の解 $z_1 = 1$ から定まる $V_{1,\Lambda}$ が正であって、 T の体積と一致することを示している。よって、 T が一般の双曲四面体の場合であっても、方程式 $f(z, T) = 0$ の解 z_1 が、理想四面体の場合の $z_1 = 1$ に対応する解であったとするとときに、 $\text{Im } V_1(T)$, $\text{Im } V(T)$, $V_{1,\Lambda}(T)$, $V_\Lambda(T)$ が正であって、 T の体積と一致することが分かる。

4 定理の証明

4.1 Cho-Kim の公式

一般的な双曲四面体の体積の公式は、Cho-Kim[1] によって示されている。以前のように定めた T の面角 A, B, C, D, E, F に対して、 $\{P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1\}$, $\{P_2, Q_2, R_2, S_2, T_2\}$ を次の P, Q, R, S, T に関する連立方程式の2つの解とする。

$$\begin{aligned} P + Q &= B, \quad R + S = E, \\ Q + R + T &= F + \pi, \quad P + S + T = C + \pi, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos D & -\cos P & \cos B & \cos C \\ -\cos D & 1 & -\cos(R+T) & \cos F & \cos E \\ -\cos P & -\cos(R+T) & 1 & -\cos Q & \cos(S+T) \\ \cos B & \cos F & -\cos Q & 1 & -\cos A \\ \cos C & \cos E & \cos(S+T) & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2)$$

実際、この連立方程式は2次方程式に帰着され、2つの解をもつ。

定理 5(Cho-Kim[1]) T の双曲体積 $\text{Vol}(T)$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
2 \text{Vol}(T) = & \Lambda(P_1) - \Lambda(Q_1) + \Lambda(R_1) - \Lambda(S_1) \\
& - \Lambda\left(\frac{B-C-A+\pi}{2} - Q_1\right) + \Lambda\left(\frac{D-B-F+\pi}{2} + Q_1\right) \\
& + \Lambda\left(\frac{E-C-D+\pi}{2} - R_1\right) - \Lambda\left(\frac{A-E-F+\pi}{2} + R_1\right) \\
& - \Lambda(P_2) + \Lambda(Q_2) - \Lambda(R_2) + \Lambda(S_2) \\
& + \Lambda\left(\frac{B-C-A+\pi}{2} - Q_2\right) - \Lambda\left(\frac{D-B-F+\pi}{2} + Q_2\right) \\
& - \Lambda\left(\frac{E-C-D+\pi}{2} - R_2\right) + \Lambda\left(\frac{A-E-F+\pi}{2} + R_2\right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ただし, $\{P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1\}, \{P_2, Q_2, R_2, S_2, T_2\}$ は (4.3) の右辺が正になるように番号付けされている.

4.2 2 次方程式の判別式

(4.1) から, Q, R, S, T を P で表すと,

$$\begin{aligned}
Q &= B - P, \quad R = (-B - C + E + F)/2 + P, \\
S &= (B + C + E - F)/2 - P, \quad T = (-B + C - E + F)/2 + \pi
\end{aligned} \tag{4.4}$$

となる. $a = \exp \sqrt{-1}A, \dots, f = \exp \sqrt{-1}F, p = \exp \sqrt{-1}P$ とおくと, (4.2) は次のようになる.

$$\begin{vmatrix}
1 & -\frac{1}{2}(d + \frac{1}{d}) & -\frac{1}{2}(p + \frac{1}{p}) & \frac{1}{2}(b + \frac{1}{b}) & \frac{1}{2}(c + \frac{1}{c}) \\
-\frac{1}{2}(d + \frac{1}{d}) & 1 & -\frac{1}{2}(\frac{fp}{b} + \frac{b}{fp}) & -\frac{1}{2}(f + \frac{1}{f}) & \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) \\
-\frac{1}{2}(p + \frac{1}{p}) & -\frac{1}{2}(\frac{fp}{b} + \frac{b}{fp}) & 1 & -\frac{1}{2}(\frac{p}{b} + \frac{b}{f}) & -\frac{1}{2}(\frac{p}{c} + \frac{c}{p}) \\
\frac{1}{2}(b + \frac{1}{b}) & \frac{1}{2}(f + \frac{1}{f}) & -\frac{1}{2}(\frac{p}{b} + \frac{b}{p}) & 1 & -\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) \\
\frac{1}{2}(c + \frac{1}{c}) & \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) & -\frac{1}{2}(\frac{p}{c} + \frac{c}{p}) & -\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) & 1
\end{vmatrix} = 0 \tag{4.5}$$

この方程式は両辺に p^2 をかけると, p^2 に関する 2 次方程式になる. そこで 2 次多項式 $g(x)$ を用いて, (4.5) は

$$g(p^2) = 0 \tag{4.6}$$

と表すことができる. さらに

$$g_1(x) = \frac{16a^2b^4c^2d^2ef^2}{(ab+c)(b+ac)(bd+f)(b+df)}g(x)$$

とおくと, $g_1(x)$ もまた多項式となり, $g_1(x) = 0$ の判別式 D_{g_1} を実際に計算すると

$$D_{g_1} = 16a^2b^4c^2d^2e^2f^2 \det(\text{Gram}(T)) \quad (4.7)$$

が成り立つ. ゆえに (2.16) より, 方程式 (4.6) と (2.15) の判別式は b^2 倍の差を除いて一致する.

4.3 定理 1 の証明

$$\begin{aligned} h(x, T) = & \text{Li}_2(x) + \text{Li}_2\left(\frac{x}{b^2}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{xef}{bc}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{xf}{bce}\right) \\ & - \text{Li}_2\left(-\frac{x}{abc}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{xf}{bd}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{xdf}{b}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{xa}{bc}\right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

とおく.

補題 x_1, x_2 を次の方程式の自明でない 2 つの解とする ;

$$\frac{dh(x, T)}{dx} = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{x}k, (k \in \mathbf{Z}) \quad (4.9)$$

このとき,

$$\text{Vol}(T) = \frac{\text{Im } h(x_1, T) - \text{Im } h(x_2, T)}{4} \quad (4.10)$$

が成り立つ. ただし x_1, x_2 は (4.10) の右辺が正となるように番号付けされている.

証明 方程式 (4.9) は次の x に関する 2 次方程式に帰着される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left((1-x) \left(1 - \frac{x}{b^2}\right) \left(1 - \frac{xef}{bc}\right) \left(1 - \frac{xf}{bce}\right) - \left(1 + \frac{x}{abc}\right) \left(1 + \frac{xf}{bd}\right) \left(1 + \frac{xdf}{b}\right) \left(1 + \frac{xa}{bc}\right) \right) \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

実際に計算すると, この方程式は, $x = p^2$ としたとき, (4.6) の方程式と同値である. よって, 関数 Li_2 と Λ との関係式 (2.18) と, $\Lambda(-x) = -\Lambda(x)$ とを用いると, $\text{Im } h(x_1, T)/4, \text{Im } h(x_2, T)/4$ は, (4.3) の半分とそれぞれ等しいことが分かる. **証明終**

定理1の証明 $\text{Im } V(T) = \text{Im}(U(z_1, T) - U(z_2, T))/2$ と $\text{Vol}(T) = \text{Im}(h(x_1, T) - h(x_2, T))/4$ の T の各面角に関する微分が一致することを示したい. $V(T)$ は面角 A, B, C, D, E, F に関して対称だから A について示すことができれば十分である. z_1, z_2 は $dU/dz = \pi\sqrt{-1}k/z$ の解で, $|z_1| = |z_2| = 1$ だから $i = 1, 2$ に対して,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(z_i, T)}{\partial A} &= \frac{\partial U(z_i, T)}{\partial a} \frac{da}{dA} \\
&= -\frac{1}{2a} (\log(1 - z_i abde) + \log(1 - z_i acdf) - \log(1 + z_i abc) - \log(1 + z_i aef)) \sqrt{-1} a \\
&\quad + \frac{\partial U(z_i, T)}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial a} \frac{da}{dA} \\
&= -\frac{\sqrt{-1}}{2} (\log(1 - z_i abde) + \log(1 - z_i acdf) - \log(1 + z_i abc) - \log(1 + z_i aef)) \\
&\quad + \frac{\pi\sqrt{-1}k_i}{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial A} \\
&= \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{(1 + z_i abc)(1 + z_i aef)}{(1 - z_i abde)(1 - z_i acdf)} - \pi k_i \alpha_i \quad (\alpha_i = \frac{\partial \arg z_i}{\partial A} \in \mathbf{R})
\end{aligned}$$

となる. x_1, x_2 は (4.9) の方程式 $dh/dx = 2\pi\sqrt{-1}k/x$ の解で, 補題の証明から $|x_1| = |x_2| = 1$ である. よって同様に $i = 1, 2$ に対して,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(x_i, T)}{\partial A} &= \frac{\partial h(x_i, T)}{\partial a} \frac{da}{dA} \\
&= \frac{1}{a} (-\log(1 + \frac{x_i}{abc}) + \log(1 + \frac{x_i a}{bc})) \sqrt{-1} a + \frac{\partial h(x_i, T)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial a} \frac{da}{dA} \\
&= \sqrt{-1} \log \frac{(1 + \frac{x_i a}{bc})}{(1 + \frac{x_i}{abc})} - \pi k'_i \alpha'_i \quad (\alpha'_i = 2 \frac{\partial \arg x_i}{\partial A} \in \mathbf{R})
\end{aligned}$$

実際に計算すると, z_1, z_2 と x_1, x_2 の適当な組み合わせに対して次が分かる (数式処理ソフト Mathematica による具体的な計算方法は付録に示した);

$$\frac{(1 + z_1 abc)(1 + z_1 aef)(1 - z_2 abde)(1 - z_2 acdf)}{(1 - z_1 abde)(1 - z_1 acdf)(1 + z_2 abc)(1 + z_2 aef)} = \frac{(1 + \frac{x_1 a}{bc})(1 + \frac{x_2}{abc})}{(1 + \frac{x_1}{abc})(1 + \frac{x_2 a}{bc})} \quad (4.12)$$

ゆえに,

$$\frac{1}{2} \text{Im} \frac{\partial}{\partial A} (U(z_1, T) - U(z_2, T)) = \frac{1}{4} \text{Im} \frac{\partial}{\partial A} (h(x_1, T) - h(x_2, T))$$

すなわち,

$$\operatorname{Im} \frac{\partial V(T)}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \operatorname{Vol}(T) \quad (4.13)$$

が M_- 内で成り立つ. したがって $\operatorname{Im} V(T) - \operatorname{Vol}(T) = C$ (定数) in M_- である. しかし $\operatorname{Im} V(T), \operatorname{Vol}(T)$ は $M_- \cup \partial M_-$ で連続なので, $\partial M_- \cap M_0$ 上でも $\operatorname{Im} V(T) - \operatorname{Vol}(T) = C$ である. $\alpha \in \partial M_- \cap M_0$ に対しては $\det \operatorname{Gram}(T(\alpha))=0$ なので, (2.16) と (4.7) から, $\operatorname{Im} V(T) = 0, \operatorname{Vol}(T) = 0$ すなわち $C = 0$ がいえる. 証明終

4.4 定理 2 の証明

定理 2 を証明するために, 次の等式を示したい;

$$\operatorname{Im}(U(z_1, T) + U(z_2, T) + 2\Delta(T)) = 0 \quad (4.14)$$

実際, (4.14) が示されれば,

$$\begin{cases} \operatorname{Im} V_1(T) + \operatorname{Im} V_2(T) = 0 \\ \operatorname{Im} V_1(T) - \operatorname{Im} V_2(T) = 2 \operatorname{Im} V(T) \end{cases}$$

が成り立つから, 定理 1 より定理 2 が示される.

そこでまず,

$$\frac{\partial}{\partial A} \operatorname{Im}(U(z_1, T) + U(z_2, T) + 2\Delta(T)) = 0$$

を示したい.

z_1, z_2 は方程式 $f(z, T) = 0$ の解だから, 解と係数の関係を使って,

$$(1 - z_1 x)(1 - z_2 x) = \frac{x^2 f(x^{-1}, T)}{\gamma}$$

が任意の x に対して成り立つことが分かる. γ は (2.14) で定義された多項式 $f(z, T)$ の 2 次の係数である. この関係から

$$(1 - z_1 abde)(1 - z_2 abde) = \frac{(abde)^3 (1 + cd^{-1}e^{-1})(1 + b^{-1}d^{-1}f)(1 + a^{-1}e^{-1}f)(1 + a^{-1}b^{-1}c)}{\gamma}$$

$$(1 - z_1 acdf)(1 - z_2 acdf) = \frac{(acdf)^3 (1 + bd^{-1}f^{-1})(1 + c^{-1}d^{-1}e)(1 + a^{-1}bc^{-1})(1 + a^{-1}ef^{-1})}{\gamma}$$

$$(1 + z_1 abc)(1 + z_2 abc) = \frac{(abc)^3 (1 + a^{-1}b^{-1}c^{-1})(1 + c^{-1}de)(1 + b^{-1}df)(1 + a^{-1}ef)}{\gamma}$$

$$(1 + z_1 aef)(1 + z_2 aef) = \frac{(aef)^3 (1 + a^{-1}e^{-1}f^{-1})(1 + bdf^{-1})(1 + cde^{-1})(1 + a^{-1}bc)}{\gamma}$$

という関係が成り立つ。これを使うと、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial A}(U(z_1, T) + U(z_2, T) + 2\Delta(T)) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \left\{ \frac{(1 + z_1 abc)(1 + z_1 aef)(1 + z_2 abc)(1 + z_2 aef)}{(1 - z_1 abde)(1 - z_1 acdf)(1 - z_2 abde)(1 - z_2 acdf)} \times \right. \\ & \quad \left. \frac{(1 + abc^{-1})(1 + ab^{-1}c)}{(1 + a^{-1}bc)(1 + a^{-1}b^{-1}c^{-1})} \times \frac{(1 + aef^{-1})(1 + ae^{-1}f)}{(1 + a^{-1}ef)(1 + a^{-1}e^{-1}f^{-1})} \times \frac{d^2}{a^4} \right\} \times \\ & \quad - \pi k_1 \alpha_1 - \pi k_2 \alpha_2, (k_i, \alpha_i \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

において、

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + z_1 abc)(1 + z_1 aef)(1 + z_2 abc)(1 + z_2 aef)}{(1 - z_1 abde)(1 - z_1 acdf)(1 - z_2 abde)(1 - z_2 acdf)} \times \\ & \quad \frac{(1 + abc^{-1})(1 + ab^{-1}c)}{(1 + a^{-1}bc)(1 + a^{-1}b^{-1}c^{-1})} \times \frac{(1 + aef^{-1})(1 + ae^{-1}f)}{(1 + a^{-1}ef)(1 + a^{-1}e^{-1}f^{-1})} \times \frac{d^2}{a^4} \\ &= \frac{(1 + a^{-1}b^{-1}c^{-1})(1 + c^{-1}de)(1 + b^{-1}df)(1 + a^{-1}ef)}{a^4 d^4 (1 + cd^{-1}e^{-1})(1 + b^{-1}d^{-1}f)(1 + a^{-1}e^{-1}f)(1 + a^{-1}b^{-1}c)} \times \\ & \quad \frac{(1 + a^{-1}e^{-1}f^{-1})(1 + bdf^{-1})(1 + cde^{-1})(1 + a^{-1}bc)}{(1 + bd^{-1}f^{-1})(1 + c^{-1}d^{-1}e)(1 + a^{-1}bc^{-1})(1 + a^{-1}ef^{-1})} \\ &= \frac{1}{a^4 d^4} \frac{(1 + c^{-1}de)}{(1 + cd^{-1}e^{-1})} \frac{(1 + b^{-1}df)}{(1 + bd^{-1}f^{-1})} \frac{(1 + bdf^{-1})}{(1 + b^{-1}d^{-1}f)} \frac{(1 + cde^{-1})}{(1 + c^{-1}d^{-1}e)} \times \\ & \quad \frac{(1 + abc^{-1})}{(1 + a^{-1}b^{-1}c)} \frac{(1 + ab^{-1}c)}{(1 + a^{-1}bc^{-1})} \frac{(1 + aef^{-1})}{(1 + a^{-1}e^{-1}f)} \frac{(1 + ae^{-1}f)}{(1 + a^{-1}ef^{-1})} \\ &= \frac{1}{a^4 d^4} (c^{-1}de)(b^{-1}df)(bdf^{-1})(cde^{-1})(abc^{-1})(ab^{-1}c)(aef^{-1})(ae^{-1}f) \\ & \quad = 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\text{Im} \frac{\partial}{\partial A}(U(z_1, T) + U(z_2, T) + 2\Delta(T)) = 0, \text{ in } M_-$$

が示された.

B, C, D, E, F に関する微分も同様である. ゆえに,

$$\operatorname{Im} V_1(T) + \operatorname{Im} V_2(T) = 2C' \text{ (定数), in } M_-$$

となる. したがって定理 1 から,

$$\operatorname{Vol}(T) = \operatorname{Im} V(T) = \operatorname{Im} V_1(T) - C'$$

であるが, $\operatorname{Vol}(T), \operatorname{Im} V_1(T)$ が $M_- \cup \partial M_-$ 上で連続であることから, ∂M_- 上でも $\operatorname{Vol}(T) = \operatorname{Im} V_1(T) - C'$ が成り立つ. $T(\alpha)$ が理想四面体のとき, $\alpha \in \partial M_-$ であり, (3.1) から $\operatorname{Vol}(T)$ と $\operatorname{Im} V_1(T)$ は一致する. したがって $C' = 0$ である. ゆえに (4.14) が, したがって定理 2 (2') が示された. 証明終

4.5 定理 3, 4 の証明

定理 3 の証明 $\alpha \in \partial M_- \cap M_0 \cap \partial M_+$ とする. α の M 内における近傍 W を考える. $\beta \in W$ とするとき, $\frac{dU(z, T(\beta))}{dz} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{z} k$ ($k \in \mathbf{Z}$) の解 z_i ($i = 1, 2$) に対して, k_i ($i = 1, 2$) を $\frac{dU}{dz} \Big|_{z=z_i} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{z_i} k_i$ を満たすものとする. ただし, W 内では k_i が一定になるように近傍 W を考えている. このとき, $U(z_i, T(\beta))$ を分枝 $U(z_i, T(\beta)) - \pi k_i \sqrt{-1} \log z_i$ に取りかえて改めて

$$V(T(\beta)) = \frac{\{U(z_1, T(\beta)) - \pi k_1 \sqrt{-1} \log z_1\} - \{U(z_2, T(\beta)) - \pi k_2 \sqrt{-1} \log z_2\}}{2}$$

とおく.

($\beta \in W \cap M_-$ のとき, $|z_i| = 1$ だから, 分枝を取りかえても $\operatorname{Im} V(T(\beta)) = \operatorname{Vol}(T(\beta))$ に変りはないことに注意)

$\beta \in W \cap M_- =: W_-$ のとき, 定理 1 の証明中の計算から,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial A} \{U(z_i, T(\beta)) - \pi k_i \sqrt{-1} \log z_i\} \\ = -\pi k_i \frac{\partial \arg z_i}{\partial A} - \operatorname{Re} \pi k_i \sqrt{-1} \frac{\partial \log z_i}{\partial A} \\ = 0 \quad (\because |z_i| = 1) \end{aligned}$$

だから,

$$\frac{\partial}{\partial A} \operatorname{Re} V(T(\beta)) = 0$$

ゆえに, $\operatorname{Re} V(T) = \text{定数}$ in W_- である. $\operatorname{Re} V(T)$ の連続性と $V(T(\alpha)) = 0$, 特に $\operatorname{Re} V(T(\alpha)) = 0$ とから, $\operatorname{Re} V(T) = 0$ in W_- である.

次に, 一般の $\beta \in M_-$ に対しては $V(T(\beta))$ を, W_- 内の 1 点から β までの道に沿って解析接続して得られる分枝とする. $\operatorname{Re} V(T) = 0$ in W_- で, $\operatorname{Re} V(T)$ が解析的であることから, $\operatorname{Re} V(T(\beta)) = 0$ がいえる. ゆえに $\operatorname{Re} V(T) = 0$ in M_- .

したがって, このように分枝を定めれば $\operatorname{Vol}(T) = \operatorname{Im} V(T) = -\sqrt{-1}V(T)$ となる. **証明終**

定理 4 の証明 $\beta \in M_+$ に対して $V(T(\beta))$ を, $W \cap M_+ =: W_+$ の 1 点から β まで解析接続して得られる分枝とする. あとは定理 3 の結果と次の命題から明らかである. **証明終**

命題 (Vinberg[9]) M を含む $\mathbf{C}^6$ の開部分集合上で定義された解析関数 V で M 上次の値をとるものが存在する.

$$V(\alpha) = \begin{cases} \operatorname{Vol} T(\alpha) & (\alpha \in M_- \text{ のとき}) \\ 0 & (\alpha \in M_0 \text{ のとき}) \\ \sqrt{-1} \operatorname{Vol} T(\alpha) & (\alpha \in M_+ \text{ のとき}) \end{cases}$$

5 量子 6j-symbol との関係

双曲四面体の体積の公式は, 量子 6j-symbol の漸近挙動を調べていく中から現れた.

5.1 量子 6j-symbol

q は 1 の原始 N 乗根, 量子 6j-symbol $\left\{ \begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix} \right\}$ に出てくるパラメータ i, j, k, l, m, n は $\{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots, (N-3)/2, (N-2)/2\} = I$ の元とする. ただし N は 3 以上の整数とする.

V_μ を $U_q(sl_2)$ の $(2\mu+1)$ 次元既約表現とすると, テンソル積における既約表現の射影 $P_{\lambda\mu}^\nu : V_\lambda \otimes V_\mu \rightarrow V_\nu$ と既約表現への埋め込み $P_\nu^{\lambda\mu} : V_\nu \rightarrow V_\lambda \otimes V_\mu$ とを用いて, 次の $U_q(sl_2)$ -写像

$$V_i \xrightarrow{P_i^{jk}} V_j \otimes V_k \xrightarrow{1 \otimes P_k^{lm}} V_j \otimes V_l \otimes V_m \xrightarrow{P_{jl}^n \otimes 1} V_n \otimes V_m \xrightarrow{P_{nm}^i} V_i$$

のあらわすスカラーを量子 6j-symbol とよび, 6 つのパラメータ i, j, k, l, m, n を用いて, $\begin{Bmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{Bmatrix}$ と書く.

向き付け可能な 3 次元多様体の単体分割に対し, 辺に表現を表すパラメータを対応させ, 4 面体にその辺のパラメータに対応する量子 6j-symbol を対応させる状態和を用いて, 3 次元多様体の不変量が定義できる. これは Turaev-Viro 不変量とよばれるもので, 実は Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量の絶対値の 2 乗と一致することが知られている [7].

量子 6j-symbol は 6 つのパラメータを用いて, 書き下すことができる [8].

自然数 n に対して

$$[n] := \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

$$[n]! := [n][n-1] \cdots [2][1]$$

とおく.

$(a, b, c), (a, e, f), (b, d, f), (c, d, e) \in \{(i, j, k) \in I^3 \mid |i - j| \leq k \leq i + j, i + j + k \text{ は } (N - 2) \text{ 以下の整数}\}$ に対して

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = \\ & [2c+1]^{\frac{1}{2}} [2f+1]^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}^{-2(a+b+d+e)} \Delta(a, b, c) \Delta(a, e, f) \Delta(b, d, f) \Delta(c, d, e) \\ & \sum_s (-1)^s [s+1]! \{ [s-a-b-c]! [s-a-e-f]! [s-b-d-f]! [s-c-d-e]! \\ & [a+b+d+e-s]! [a+c+d+f-s]! [b+c+e+f-s]! \}^{-1} \quad (5.1) \end{aligned}$$

である. ここで $\sum_s$ は

$$s \leq \min(a+b+d+e, a+c+d+f, b+c+e+f)$$

$$s \geq \max(a+b+c, a+e+f, b+d+f, c+d+e)$$

を満たす整数すべてについて和をとる.

$$\text{ただし } \Delta(i, j, k) := \left(\frac{[i+j-k]! [i+k-j]! [j+k-i]!}{[i+j+k+1]!} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ である.}$$

5.2 鞍点法

複素関数 $f(z)$ が解析関数 $g(z)$ を用いて、複素平面上のある曲線 C に沿う積分表示

$$f(z) = \int_C \exp(zg(t)) dt$$

で表されているとする。 $|z|$ が十分大きいときに、 $f(z)$ の漸近的表示を求める方法が鞍点法である。

$g'(t) = 0$ を満たす値 t_0 を $g(t)$ の鞍点という。鞍点 t_0 を通り、 $\text{Im } g(t)$ が一定となる直線は最急勾配曲線とよばれる。それは、この曲線上に沿って $|\exp(zg(t))|$ の値が、 $t = t_0$ で極値をとり、その両側で最も急激に変化するからである。最急勾配曲線のうち、 $|\exp(zg(t))|$ の値が、 $t = t_0$ で極大値をとり、その両側で最も急激に減少する曲線を最急降下曲線という。

積分経路 C を $g(t)$ が正則な範囲で動かして、 $t = t_0$ を通る最急降下曲線となるように変形できたとすると、 $|z| \gg 1$ ならば、 $|\exp(zg(t))|$ の値は $t = t_0$ の近傍で最も大きくなり、他では急激に小さくなるので、 $f(z)$ の値は鞍点 $t = t_0$ の近傍での積分の値で十分よく近似できる。

$g(t)$ の $t = t_0$ での Taylor 展開

$$g(t) = g(t_0) + \frac{1}{2}g''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

において、第2項までとると、

$$\begin{aligned} f(z) &\sim \exp(zg(t_0)) \int \exp\left(\frac{1}{2}zg''(t_0)(t - t_0)^2\right) dt \\ &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{-zg''(t_0)}} \exp(zg(t_0)) \quad (5.2) \end{aligned}$$

となる。

5.3 量子 6j-symbol の鞍点法による漸近展開

Kashaev[2] と同様の手法を用いて、式 (5.1) に鞍点法を適用できると仮定し、その漸近展開を考える。

準備 ([2] による) 以下、 $i = \sqrt{-1}$ とする。

1 の原始 N 乗根 $q = \exp 2\pi i/N$ に対して、

$$(q)_k := \prod_{j=1}^k (1 - q^j), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

とおく. このとき,

$$[n]! = \frac{(q)_n}{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^n} \prod_{j=1}^k (-q^{-\frac{j}{2}}) \quad (5.3)$$

$$= \frac{(\bar{q})_n}{(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^n} \prod_{j=1}^k q^{\frac{j}{2}} \quad (5.4)$$

である. ここで, $(\bar{q})_n$ は $(q)_n$ の複素共役である.

$|\operatorname{Re} p| \leq \pi + \gamma$ を満たす, 複素数 p に対して,

$$S_\gamma(p) := \exp \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{\sinh(\pi x) \sinh(\gamma x)} \frac{dx}{x}$$

とおく. この関数は次の性質をもつ.

$$(1 + e^{ip}) S_\gamma(p + \gamma) = S_\gamma(p - \gamma) \quad (5.5)$$

$$S_\gamma(p) \sim \exp \frac{1}{2i\gamma} \operatorname{Li}_2(-e^{ip}), \gamma \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

$$f_\gamma(p) := \frac{S_\gamma(\gamma - \pi)}{S_\gamma(p)}, \bar{f}_\gamma(p) := \frac{S_\gamma(-p)}{S_\gamma(\pi - \gamma)} \quad (5.7)$$

とおくと, 性質 (5.5) より, $\gamma = \frac{\pi}{N}$ に対して,

$$(q)_k = f_\gamma(-\pi + \gamma + 2k\gamma) \quad (5.8)$$

$$(\bar{q})_k = \bar{f}_\gamma(-\pi + \gamma + 2k\gamma) \quad (5.9)$$

が成り立つ.

$\tan z$ の漸近挙動 $\tan z = \tan(x + iy)$ の挙動について調べる.

$$\begin{aligned} \tan(x + iy) &= \frac{\tan x + \tan(iy)}{1 - \tan x \tan(iy)} = \frac{\tan x + i \tanh y}{1 - i \tan x \tanh y} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x \tanh^2 y} \{(\tan x - \tan x \tanh^2 y) + i(\tan^2 x \tanh y + \tanh y)\} \end{aligned}$$

だから,

$$\tanh y = \begin{cases} 1 & (y \gg 1 \text{ のとき}) \\ -1 & (y \ll -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

より,

$$\tan(x + iy) = \begin{cases} i & (y \gg 1 \text{ のとき}) \\ -i & (y \ll -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.10)$$

である. $\tan z$ の極を通り虚軸に平行な直線上では,

$$\tan(x + iy) = i \tanh y \sim \begin{cases} i & (y > 0 \text{ のとき}) \\ -i & (y < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (5.11)$$

である.

漸近展開式の計算 式 (5.1) に (5.3) または (5.4) を代入して整理すると,

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{Bmatrix} = \\ & (q^{\frac{2kc+1}{2}} - q^{-\frac{2kc+1}{2}})^{1/2} (q^{\frac{2kf+1}{2}} - q^{-\frac{2kf+1}{2}})^{1/2} \sqrt{-1}^{-2k(a+b+d+e)} \times \\ & q^{-\frac{1}{2} + k^2(-a^2-b^2-c^2-d^2-e^2-f^2+ad+be+cf)} \times \\ & \left(\frac{(q)_{k(a+b-c)}(q)_{k(b+c-a)}(q)_{k(c+a-b)}}{(\bar{q})_{k(a+b+c)+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(q)_{k(a+e-f)}(q)_{k(e+f-a)}(q)_{k(f+a-e)}}{(\bar{q})_{k(a+e+f)+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\frac{(q)_{k(b+d-f)}(q)_{k(d+f-b)}(q)_{k(f+b-d)}}{(\bar{q})_{k(b+d+f)+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(q)_{k(c+d-e)}(q)_{k(d+e-c)}(q)_{k(e+c-d)}}{(\bar{q})_{k(c+d+e)+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \sum_s q^{-s} (q)_{s+1} \left\{ (q)_{s-k(a+b+c)}(q)_{s-k(a+e+f)}(q)_{s-k(b+d+f)}(q)_{s-k(c+d+e)} \right. \\ & \left. (q)_{k(a+b+d+e)-s}(q)_{k(a+c+d+f)-s}(q)_{k(b+c+e+f)-s} \right\}^{-1} \quad (5.12) \end{aligned}$$

となる.

ここで, 式 (5.8), (5.9), (5.7), (5.6) を用いると,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(q)_{k(a+b-c)}(q)_{k(b+c-a)}(q)_{k(c+a-b)}}{(\bar{q})_{k(a+b+c)+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \underline{(5.8)(5.9)} \\ & \left\{ f_\gamma(-\pi + \gamma + 2k(a+b-c)\gamma) f_\gamma(-\pi + \gamma + 2k(b+c-a)\gamma) \times \right. \\ & \left. f_\gamma(-\pi + \gamma + 2k(c+a-b)\gamma) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \bar{f}_\gamma(-\pi + \gamma + 2(k(a+b+c)+1)\gamma) \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\stackrel{(5.7)}{=} (S_\gamma(\gamma-\pi)^3 S_\gamma(\pi-\gamma))^{\frac{1}{2}} (S_\gamma(-\pi+\gamma+2k(a+b-c)\gamma) S_\gamma(-\pi+\gamma+2k(b+c-a)\gamma) S_\gamma(-\pi+\gamma+2k(c+a-b)\gamma) S_\gamma(\pi-\gamma-2(k(a+b+c)+1)\gamma))^{-\frac{1}{2}}$$

$$\stackrel{(5.6)}{\sim} (S_\gamma(\gamma-\pi)^3 S_\gamma(\pi-\gamma))^{\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{2i\gamma} \frac{1}{2} \{ -\text{Li}_2(e^{i2k(a+b-c)\gamma}) - \text{Li}_2(e^{i2k(b+c-a)\gamma}) - \text{Li}_2(e^{i2k(c+a-b)\gamma}) - \text{Li}_2(e^{-i2k(a+b+c)\gamma}) \}$$

$$= (S_\gamma(\gamma-\pi)^3 S_\gamma(\pi-\gamma))^{\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{2i\gamma} \frac{1}{2} \{ -\text{Li}_2(ABC^{-1}) - \text{Li}_2(A^{-1}BC) - \text{Li}_2(AB^{-1}C) - \text{Li}_2(A^{-1}B^{-1}C^{-1}) \} \quad (5.13)$$

となる. ここで, $A = e^{i2ka\gamma} = e^{i2\frac{k}{N}a\pi}, \dots, F = e^{i2kf\gamma} = e^{i2\frac{k}{N}f\pi}$ とおいた.

次に, $\sum_s \dots$ の部分に式 (5.8), (5.9) を用いた後, 留数定理によって積分表示し, 上と同様に, 式 (5.7), (5.6) を適用する.

$$\sum_s q^{-s} (\bar{q})_{s+1} \{ (\bar{q})_{s-k(a+b+c)} (\bar{q})_{s-k(a+e+f)} (\bar{q})_{s-k(b+d+f)} (\bar{q})_{s-k(c+d+e)} (q)_{k(a+b+d+e)-s} (q)_{k(a+c+d+f)-s} (q)_{k(b+c+e+f)-s} \}^{-1}$$

$$\stackrel{(5.8)(5.9)}{=} \sum_s q^{-s} \bar{f}_\gamma(-\pi+\gamma+2(s+1)\gamma) \{ \bar{f}_\gamma(-\pi+\gamma+2(s-k(a+b+c))\gamma) \bar{f}_\gamma(-\pi+\gamma+2(s-k(a+e+f))\gamma) \bar{f}_\gamma(-\pi+\gamma+2(s-k(b+d+f))\gamma) \bar{f}_\gamma(-\pi+\gamma+2(s-k(c+d+e))\gamma) f_\gamma(-\pi+\gamma+2(k(a+b+d+e)-s)\gamma) f_\gamma(-\pi+\gamma+2(k(a+c+d+f)-s)\gamma) f_\gamma(-\pi+\gamma+2(k(b+c+e+f)-s)\gamma) \}^{-1}$$

$$\stackrel{\text{留数定理}}{=} \frac{i}{4\gamma} \oint_C dp \tan\left(\frac{\pi^2 + \pi p}{2\gamma}\right) q^{-\frac{\pi+p}{2\gamma} + \frac{3}{2}} \bar{f}_\gamma(p) \{ \bar{f}_\gamma(p-2(k(a+b+c)+1)\gamma) \bar{f}_\gamma(p-2(k(a+e+f)+1)\gamma) \bar{f}_\gamma(p-2(k(b+d+f)+1)\gamma) \bar{f}_\gamma(p-2(k(c+d+e)+1)\gamma) f_\gamma(-p-2\pi+2(2+k(a+b+d+e))\gamma) f_\gamma(-p-2\pi+2(2+k(a+c+d+f))\gamma) f_\gamma(-p-2\pi+2(2+k(b+c+e+f))\gamma) \}^{-1} \quad (5.14)$$

ここで積分経路 $C = C_1 \cup C_2$ は $\tan(\frac{\pi^2 + \pi p}{2\gamma})$ の極 $\pi + \gamma + 2(s+1)\gamma$ ($m = \max(k(a+b+c), k(a+e+f), k(b+d+f), k(c+d+e)) \leq s \leq \min(k(a+b+d+e), k(a+c+d+f), k(b+c+e+f)) = M$) を内点に含む左回りの経路である。(図 2)

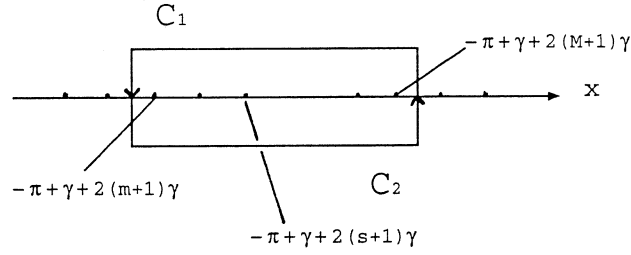


図 2: 積分経路 $C = C_1 \cup C_2$

(5.7) を用いると,

$$\begin{aligned}
 (5.14) & \stackrel{(5.7)}{=} q^{\frac{3}{2}} \left(\frac{S_\gamma(\pi - \gamma)}{S_\gamma(\gamma - \pi)} \right)^3 \frac{i}{4\gamma} \oint_C dp \tan\left(\frac{\pi^2 + \pi p}{2\gamma}\right) \times \\
 & \quad \{-e^{-ip} S_\gamma(-p) S_\gamma(-p - 2\pi + 2(2 + k(a+b+d+e))\gamma) \\
 & \quad S_\gamma(-p - 2\pi + 2(2 + k(a+c+d+f))\gamma) S_\gamma(-p - 2\pi + 2(2 + k(b+c+e+f))\gamma)\} \times \\
 & \quad \{S_\gamma(-p + 2(k(a+b+c) + 1)\gamma) S_\gamma(-p + 2(k(a+e+f) + 1)\gamma) \\
 & \quad S_\gamma(-p + 2(k(b+d+f) + 1)\gamma) S_\gamma(-p + 2(k(c+d+e) + 1)\gamma)\}^{-1} \\
 & \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

となる.

$\tan z$ の挙動の節より, $\gamma \rightarrow 0$ のとき,

$$\tan\left(\frac{\pi^2 + \pi p}{2\gamma}\right) \sim \begin{cases} i & (C_1 \text{ 上}) \\ -i & (C_2 \text{ 上}) \end{cases}$$

である. よって (5.6) を用いると,

$$\begin{aligned}
(5.15) \quad & \stackrel{(5.6)}{\sim} q^{\frac{3}{2}} \left(\frac{S_\gamma(\pi - \gamma)}{S_\gamma(\gamma - \pi)} \right)^3 \times \\
& \frac{i}{4\gamma} \left\{ i \int_{C_1} dp (-e^{-ip}) \exp \frac{1}{2i\gamma} \left\{ \text{Li}_2(-e^{-ip}) + \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(a+b+d+e)\gamma}) \right. \right. \\
& \quad + \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(a+c+d+f)\gamma}) + \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(b+c+e+f)\gamma}) \\
& \quad - \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(a+b+c)\gamma}) - \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(a+e+f)\gamma}) \\
& \quad - \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(b+d+f)\gamma}) - \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(c+d+e)\gamma}) \left. \right\} \\
& - i \int_{C_2} dp (-e^{-ip}) \exp \frac{1}{2i\gamma} \left\{ \text{Li}_2(-e^{-ip}) + \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(a+b+d+e)\gamma}) \right. \\
& \quad + \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(a+c+d+f)\gamma}) + \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(b+c+e+f)\gamma}) \\
& \quad - \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(a+b+c)\gamma}) - \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(a+e+f)\gamma}) \\
& \quad \left. - \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(b+d+f)\gamma}) - \text{Li}_2(-e^{-ip+i2k(c+d+e)\gamma}) \right\} \Big\}
\end{aligned}$$

となる．ここで $A = e^{i2ka\gamma}, \dots, F = e^{i2kf\gamma}$ とおき， $z = -e^{-ip}$ で変換すると， $dp = (i/z)dz$ だから，

$$\begin{aligned}
& = q^{\frac{3}{2}} \left(\frac{S_\gamma(\pi - \gamma)}{S_\gamma(\gamma - \pi)} \right)^3 \frac{1}{4\gamma} \left\{ - \int_{C'_1} dz \exp \frac{1}{2i\gamma} \left\{ \text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(zABCD) \right. \right. \\
& \quad + \text{Li}_2(zACDF) + \text{Li}_2(zBCEF) - \text{Li}_2(zABC) \\
& \quad - \text{Li}_2(zAEF) - \text{Li}_2(zBDF) - \text{Li}_2(zCDE) \left. \right\} \\
& + \int_{C'_2} dz \exp \frac{1}{2i\gamma} \left\{ \text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(zABCD) + \text{Li}_2(zACDF) \right. \\
& \quad + \text{Li}_2(zBCEF) - \text{Li}_2(zABC) - \text{Li}_2(zAEF) \\
& \quad \left. - \text{Li}_2(zBDF) - \text{Li}_2(zCDE) \right\} \Big\} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

となる．ただし， C'_1, C'_2 は変換 $z = -e^{-ip}$ により C_1, C_2 に対応する積分経路である．(5.16) の被積分関数は $C' = C'_1 \cup C'_2$ 内で正則だから， $\int_{C_1} = - \int_{C_2}$ である．よって，

$$\begin{aligned}
(5.16) = & q^{\frac{3}{2}} \left(\frac{S_\gamma(\pi - \gamma)}{S_\gamma(\gamma - \pi)} \right)^3 \frac{1}{2\gamma} \int_{C_2} dz \exp \frac{1}{2i\gamma} \left\{ \text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(zABCD) \right. \\
& + \text{Li}_2(zACDF) + \text{Li}_2(zBCEF) - \text{Li}_2(zABC) \\
& \left. - \text{Li}_2(zAEF) - \text{Li}_2(zBDF) - \text{Li}_2(zCDE) \right\} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

となる.

$\gamma = \frac{\pi}{N} \rightarrow 0$ としたとき, (5.17) の積分 $\int_{C_2}$ に鞍点法が適用 できた とする
と,

$$\begin{aligned} & \int_{C'_2} dz \exp \frac{N}{2\pi i} \{ \text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(zABCD) + \text{Li}_2(zACDF) + \text{Li}_2(zBCEF) \\ & \quad - \text{Li}_2(zABC) - \text{Li}_2(zAEF) - \text{Li}_2(zBDF) - \text{Li}_2(zCDE) \} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{-Ng''(z_1)}} \exp \frac{N}{2\pi i} \{ \text{Li}_2(z_1) + \text{Li}_2(z_1ABCD) + \text{Li}_2(z_1ACDF) + \text{Li}_2(z_1BCEF) \\ & \quad - \text{Li}_2(z_1ABC) - \text{Li}_2(z_1AEF) - \text{Li}_2(z_1BDF) - \text{Li}_2(z_1CDE) \} \quad (5.18) \end{aligned}$$

となる. ここで, $g(z)$ は

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{2\pi i} \{ & \text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(zABCD) + \text{Li}_2(zACDF) + \text{Li}_2(zBCEF) \\ & - \text{Li}_2(zABC) - \text{Li}_2(zAEF) - \text{Li}_2(zBDF) - \text{Li}_2(zCDE) \} \end{aligned}$$

で, z_1 は, $g'(z) = 0$ の非自明な解のうち, 積分への寄与が最も大きい鞍点とする. このとき,

$$\begin{aligned} g''(z_1) = \frac{1}{2\pi i z_1} \left(\frac{1}{1-z_1} + \frac{ABDE}{1-z_1ABDE} + \frac{ACDF}{1-z_1ACDF} + \frac{BCEF}{1-z_1BCEF} \right. \\ \left. - \frac{ABC}{1-z_1ABC} - \frac{AEF}{1-z_1AEF} - \frac{BDF}{1-z_1BDF} - \frac{CDE}{1-z_1CDE} \right) \neq 0 \end{aligned}$$

である.

以上をまとめると, $\frac{k}{N}$: 一定のもとで, $k \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, (\gamma \rightarrow 0)$ とするとき,

$$q^{-k^2 a^2} = \exp \frac{-1}{2i\gamma} (\log A)^2, \dots, q^{k^2 ad} = \exp \frac{1}{2i\gamma} \log A \log D, \dots$$

を用いて,

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix} \right| \sim |(q^{\frac{2kc+1}{2}} - q^{-\frac{2kc+1}{2}})^{1/2} (q^{\frac{2kf+1}{2}} - q^{-\frac{2kf+1}{2}})^{1/2}| \times \\
& |S_\gamma(\gamma - \pi)^3| |S_\gamma(\pi - \gamma)^5| \times \left| \sqrt{\frac{2\pi}{-Ng''(z_1)}} \right| \times \left| \frac{1}{2\gamma} \right| \times \\
& \exp \frac{N}{2\pi} \operatorname{Im} \{ -(\log A)^2 - (\log B)^2 - (\log C)^2 - (\log D)^2 - (\log E)^2 - (\log F) \\
& \quad + \log A \log D + \log B \log E + \log C \log F \\
& \quad - \frac{1}{2} (\operatorname{Li}_2(ABC^{-1}) + \operatorname{Li}_2(A^{-1}BC) + \operatorname{Li}_2(AB^{-1}C) + \operatorname{Li}_2(A^{-1}B^{-1}C^{-1}) \\
& \quad + \operatorname{Li}_2(AEF^{-1}) + \operatorname{Li}_2(A^{-1}EF) + \operatorname{Li}_2(AE^{-1}F) + \operatorname{Li}_2(A^{-1}E^{-1}F^{-1}) \\
& \quad + \operatorname{Li}_2(BDF^{-1}) + \operatorname{Li}_2(B^{-1}DF) + \operatorname{Li}_2(BD^{-1}F) + \operatorname{Li}_2(B^{-1}D^{-1}F^{-1}) \\
& \quad + \operatorname{Li}_2(CDE^{-1}) + \operatorname{Li}_2(C^{-1}DE) + \operatorname{Li}_2(CD^{-1}E) + \operatorname{Li}_2(C^{-1}D^{-1}E^{-1})) \\
& \quad + \operatorname{Li}_2(z_1) + \operatorname{Li}_2(z_1ABCD) + \operatorname{Li}_2(z_1ACDF) + \operatorname{Li}_2(z_1BCEF) \\
& \quad - \operatorname{Li}_2(z_1ABC) - \operatorname{Li}_2(z_1AEF) - \operatorname{Li}_2(z_1BDF) - \operatorname{Li}_2(z_1CDE) \} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

となる。ここで, $\frac{k}{N}$: 一定 だから,

$$\frac{\pi}{N} \log |(q^{\frac{2kc+1}{2}} - q^{-\frac{2kc+1}{2}})^{1/2} (q^{\frac{2kf+1}{2}} - q^{-\frac{2kf+1}{2}})^{1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{-Ng''(z_1)}} \frac{1}{2\gamma}| \sim 0$$

となる。さらに (5.6) を用いると,

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{N} \log |S_\gamma(\pi - \gamma)| \sim \\
& \frac{\pi}{N} \log \left| \exp \frac{1}{2\gamma} \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(e^{-\sqrt{-1}\gamma})) \right| = \Lambda(-\frac{\gamma}{2}) \sim 0
\end{aligned}$$

同様に,

$$\frac{\pi}{N} \log |S_\gamma(\gamma - \pi)| \sim 0$$

である。よって,

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{N} \log \left| \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix} \right| \sim \\
& \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{Li}_2(z_1) + \operatorname{Li}_2(z_1 ABCD) + \operatorname{Li}_2(z_1 ACDF) + \operatorname{Li}_2(z_1 BCEF)) \right. \\
& \quad - \operatorname{Li}_2(z_1 ABC) - \operatorname{Li}_2(z_1 AEF) - \operatorname{Li}_2(z_1 BDF) - \operatorname{Li}_2(z_1 CDE)) \\
& \quad - \frac{1}{4} (\operatorname{Li}_2(ABC^{-1}) + \operatorname{Li}_2(A^{-1}BC) + \operatorname{Li}_2(AB^{-1}C) + \operatorname{Li}_2(A^{-1}B^{-1}C^{-1}) \\
& \quad \quad + (\log A)^2 + (\log B)^2 + (\log C)^2 \\
& \quad + \operatorname{Li}_2(AEF^{-1}) + \operatorname{Li}_2(A^{-1}EF) + \operatorname{Li}_2(AE^{-1}F) + \operatorname{Li}_2(A^{-1}E^{-1}F^{-1}) \\
& \quad \quad + (\log A)^2 + (\log E)^2 + (\log F)^2 \\
& \quad + \operatorname{Li}_2(BDF^{-1}) + \operatorname{Li}_2(B^{-1}DF) + \operatorname{Li}_2(BD^{-1}F) + \operatorname{Li}_2(B^{-1}D^{-1}F^{-1}) \\
& \quad \quad + (\log B)^2 + (\log D)^2 + (\log F)^2 \\
& \quad + \operatorname{Li}_2(CDE^{-1}) + \operatorname{Li}_2(C^{-1}DE) + \operatorname{Li}_2(CD^{-1}E) + \operatorname{Li}_2(C^{-1}D^{-1}E^{-1}) \\
& \quad \quad + (\log C)^2 + (\log D)^2 + (\log E)^2) \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (\log A \log D + \log B \log E + \log C \log F) \right\} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

となる.

(5.20) の右辺は定理 2 より, 双曲四面体 $T((\frac{2ak}{N} - 1)\pi, \dots, (\frac{2fk}{N} - 1)\pi)$ の体積である.

双曲四面体の体積の公式 (定理 1, 2) はもともと, (5.20) の右辺が $T((\frac{2ak}{N} - 1)\pi, \dots, (\frac{2fk}{N} - 1)\pi)$ の体積と一致すること, そして, 鞍点 z_1 をもう一つの鞍点 z_2 に取り替えると絶対値は変わらず, 符号だけが変化することを数値実験で検証していった中で導かれた.

5.4 鞍点法が適用できない理由

上で得られた関係式 (5.20) は $\begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}$ の漸近展開において, 鞍点法が適用できると仮定して, 極限の計算を進めた結果得られた関係式である.

しかし, 実際には特異点が存在するために, 積分経路を正則な範囲で動かして, 鞍点を通る経路に変形できないことが分かり, 量子 6j-symbol の極限值と四面体の体積とが対応していないことが分かった.

図 3 は $a = b = c = d = e = f$ の場合における積分経路 C'_2 , 鞍点 z_1 ,

z_2 , そして特異点 0 との位置関係を示した

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2(zABCD) + \operatorname{Li}_2(zACDF) + \operatorname{Li}_2(zBCEF) \\ & \quad - \operatorname{Li}_2(zABC) - \operatorname{Li}_2(zAEF) - \operatorname{Li}_2(zBDF) - \operatorname{Li}_2(zCDE)) \\ & \quad (A = B = C = D = E = F) \end{aligned}$$

の等高線プロットである.

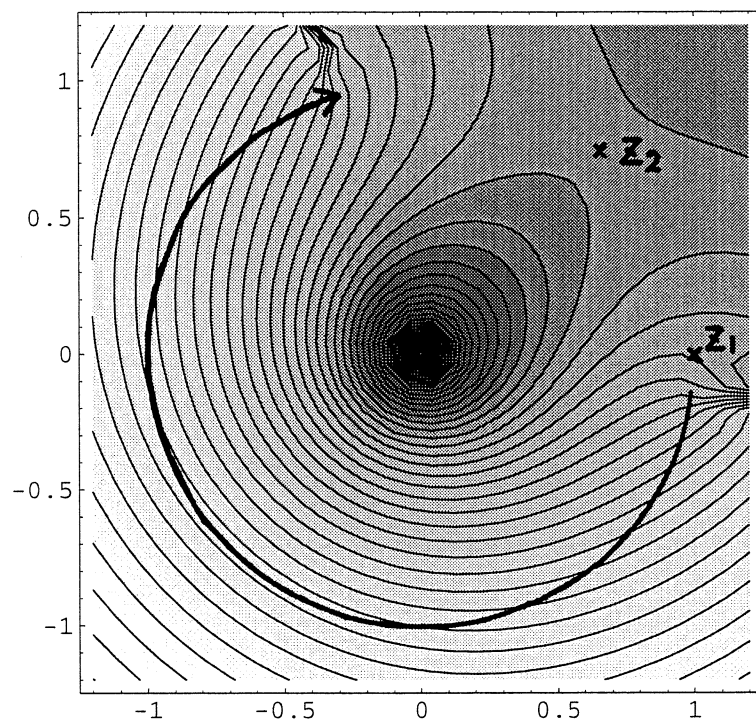


図 3: 等高線プロット

6 まとめ

量子 6j-symbol のある種の極限值と双曲四面体の体積は実際には対応していなかったが，量子 6j-symbol から四面体の公式が導かれたことから， sl_2 の量子展開環 $U_q(sl_2)$ の表現から定義される量子 6j-symbol を，式 (5.1) の s に関する和の範囲をうまく広げるなどして定義し直して，

$$\frac{\pi}{N} \log \left| \begin{Bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{Bmatrix} \right| \sim \text{Vol} T((\frac{2ak}{N} - 1)\pi, \dots, (\frac{2fk}{N} - 1)\pi)$$

と真に対応をつけることができるのではないかと予想される．

付録

等式(4.12)の数式処理ソフト(Mathematica)を用いた計算方法について.

まず, 方程式(2.14)を解く ;

$$\text{Solve}[-((1-z)(1-zabde)(1-zacdf)(1-zbcef) \\ -(1+zabc)(1+zaef)(1+z bdf)(1+z cde))/z == 0, z]$$

その解を, $z[1]$, $z[2]$ とおく ;

$$z[1] = \frac{(abde - abc^2de + acdf - ab^2cdf + bcef - a^2bcef - bcd^2ef + a^2bcd^2ef - acde^2f + ab^2cde^2f - abdef^2 + abc^2def^2 - \sqrt{P})}{(2(a^2bcd^2ef + ab^2c^2d^2ef + ab^2cde^2f + a^2bc^2de^2f + a^2b^2cdef^2 + abc^2def^2 + abcd^2e^2f^2 + a^2b^2c^2d^2e^2f^2))}$$

$$z[2] = \frac{(abde - abc^2de + acdf - ab^2cdf + bcef - a^2bcef - bcd^2ef + a^2bcd^2ef - acde^2f + ab^2cde^2f - abdef^2 + abc^2def^2 + \sqrt{P})}{(2(a^2bcd^2ef + ab^2c^2d^2ef + ab^2cde^2f + a^2bc^2de^2f + a^2b^2cdef^2 + abc^2def^2 + abcd^2e^2f^2 + a^2b^2c^2d^2e^2f^2))}$$

ただし, P は方程式(2.14)の判別式である ;

$$P = ((-abde + abc^2de - acdf + ab^2cdf - bcef + a^2bcef + bcd^2ef - a^2bcd^2ef + acde^2f - ab^2cde^2f + abdef^2 - abc^2def^2))^2 - 4(1 + abc + abde + cde + bdf + acdf + aef + bcef)(a^2bcd^2ef + ab^2c^2d^2ef + ab^2cde^2f + a^2bc^2de^2f + a^2b^2cdef^2 + abc^2def^2 + abcd^2e^2f^2 + a^2b^2c^2d^2e^2f^2)$$

次に方程式(4.11)を解く ;

$$\text{Solve}[((1-x)(1-x/(b^2))(1-xef/(bc))(1-xf/(bce)) - (1+x/(abc))(1+xf/(bd))(1+xdf/b)(1+xa/(bc)))/x == 0, x]$$

その解を, $x[1]$, $x[2]$ とおく. 方程式 (4.11) の判別式は (2.16), (4.7) より $b^2 P$ だから,

$$\begin{aligned} x[1] = & \\ & (ab^2 de - ab^2 c^2 de - abcd f - ab^3 cdf + b^2 cef + a^2 b^2 cef + b^2 cd^2 ef + \\ & a^2 b^2 cd^2 ef - abcde^2 f - ab^3 cde^2 f - ab^2 def^2 + ab^2 c^2 def^2 + b\sqrt{P}) \\ & /2 (- abcd f - abef - abd^2 ef - abcde^2 f - \\ & adef^2 - ab^2 def^2 - bcdef^2 - a^2 bcdef^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[2] = & \\ & (ab^2 de - ab^2 c^2 de - abcd f - ab^3 cdf + b^2 cef + a^2 b^2 cef + b^2 cd^2 ef + \\ & a^2 b^2 cd^2 ef - abcde^2 f - ab^3 cde^2 f - ab^2 def^2 + ab^2 c^2 def^2 - b\sqrt{P}) \\ & /2 (- abcd f - abef - abd^2 ef - abcde^2 f - \\ & adef^2 - ab^2 def^2 - bcdef^2 - a^2 bcdef^2) \end{aligned}$$

である.

$(1 + z_1 abc)((1 + z_1 aef)(1 - z_2 abde)(1 - z_2 acdf)(1 + \frac{x_1}{abc})(1 + \frac{x_2 a}{bc})$ をまとめる ;

$$\begin{aligned} & \mathbf{Factor}[(1 + z[1] a b c)(1 + z[1] a e f)(1 - z[2] a b d e)(1 - z[2] a c d f)] \\ & \mathbf{Factor}[(1 + x[1]/(a b c))(1 + x[2] a/(b c))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - ((2abcd^2 + 2b^2c^2d^2 + abde + 2b^2cde + abc^2de + \\
& acdf + ab^2cdf + 2bc^2df + bcef - a^2bcef + bcd^2ef + a^2bcd^2ef \\
& 2ab^2c^2d^2ef - acde^2f + ab^2cde^2f - abdef^2 + abc^2def^2 - \sqrt{P}) \\
& (- abde + abc^2de + acdf + ab^2cdf + 2a^2bc^2df - bcef + a^2bcef - \\
& bcd^2ef + a^2bcd^2ef + acde^2f + ab^2cde^2f + 2a^2bc^2de^2f + \\
& abdef^2 + 2a^2cdef^2 + 2a^2b^2cdef^2 + abc^2def^2 + 2a^3bc^2def^2 - \sqrt{P}) \\
& (abde - abc^2de + acdf - ab^2cdf + bcef - a^2bcef + 2ad^2ef + \\
& bcd^2ef + a^2bcd^2ef + 2bde^2f + acde^2f + ab^2cde^2f + \\
& abdef^2 + 2cdef^2 + abc^2def^2 + 2d^2e^2f^2 + 2abcd^2e^2f^2 - \sqrt{P}) \\
& (abde - abc^2de - acdf - ab^2cdf - 2bc^2df - bcef - a^2bcef - \\
& 2ac^2ef - bcd^2ef + a^2bcd^2ef - acde^2f + ab^2cde^2f - \\
& 2abcf^2 - 2c^2f^2 - abdef^2 - 2cdef^2 - abc^2def^2 + \sqrt{P}) \\
& (abde - 2b^2cde - abc^2de - 2b^2e^2 - 2abce^2 + acdf - ab^2cdf - \\
& 2ab^2ef - bcef - a^2bcef - bcd^2ef + a^2bcd^2ef - \\
& 2bde^2f - acde^2f - ab^2cde^2f - abdef^2 + abc^2def^2 + \sqrt{P}) \\
& (a^2bde - a^2bc^2de - a^2cdf - a^2b^2cdf - 2abc^2df - abcef + a^3bcef - \\
& abcd^2ef + a^3bcd^2ef - a^2cde^2f - a^2b^2cde^2f - 2abc^2de^2f - \\
& a^2bdef^2 - 2acdef^2 - 2ab^2cdef^2 - 2bc^2def^2 - a^2bc^2def^2 - a\sqrt{P})) \\
& / (64ab^2c^4d^2e^2f^4(ad + bcd + be + ace + abf + cf + def + abcdef)^4 \\
& (abcd + abe + abd^2e + abcde^2 + adef + ab^2def + bcdef + a^2bcdef)^2)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

となる.

次に, $(1 + z_2abc)((1 + z_2acf)(1 - z_1abde)(1 - z_1acdf)(1 + \frac{x_2}{abc})(1 + \frac{x_1a}{bc})$
をまとめる ;

$$\begin{aligned}
& \text{Factor}[(1 + z[2]abc)(1 + z[2]acf)(1 - z[1]abde)(1 - z[1]acdf)] \\
& \text{Factor}[(1 + x[2]/(abc))(1 + x[1]a/(bc))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -((2abcd^2 + 2b^2c^2d^2 + abde + 2b^2cde + abc^2de + \\
& acdf + ab^2cdf + 2bc^2df + bcef - a^2bcef + bcd^2ef + a^2bcd^2ef \\
& 2ab^2c^2d^2ef - acde^2f + ab^2cde^2f - abdef^2 + abc^2def^2 + \sqrt{P}) \\
& (-abde + abc^2de + acdf + ab^2cdf + 2a^2bc^2df - bcef + a^2bcef - \\
& bcd^2ef + a^2bcd^2ef + acde^2f + ab^2cde^2f + 2a^2bc^2de^2f + \\
& abdef^2 + 2a^2cdef^2 + 2a^2b^2cdef^2 + abc^2def^2 + 2a^3bc^2def^2 + \sqrt{P}) \\
& (abde - abc^2de + acdf - ab^2cdf + bcef - a^2bcef + 2ad^2ef + \\
& bcd^2ef + a^2bcd^2ef + 2bde^2f + acde^2f + ab^2cde^2f + \\
& abdef^2 + 2cdef^2 + abc^2def^2 + 2d^2e^2f^2 + 2abcd^2e^2f^2 + \sqrt{P}) \\
& (abde - abc^2de - acdf - ab^2cdf - 2bc^2df - bcef - a^2bcef - \\
& 2ac^2ef - bcd^2ef + a^2bcd^2ef - acde^2f + ab^2cde^2f - \\
& 2abcf^2 - 2c^2f^2 - abdef^2 - 2cdef^2 - abc^2def^2 - \sqrt{P}) \\
& (abde - 2b^2cde - abc^2de - 2b^2e^2 - 2abce^2 + acdf - ab^2cdf - \\
& 2ab^2ef - bcef - a^2bcef - bcd^2ef + a^2bcd^2ef - \\
& 2bde^2f - acde^2f - ab^2cde^2f - abdef^2 + abc^2def^2 - \sqrt{P}) \\
& (a^2bde - a^2bc^2de - a^2cdf - a^2b^2cdf - 2abc^2df - abcef + a^3bcef - \\
& abcd^2ef + a^3bcd^2ef - a^2cde^2f - a^2b^2cde^2f - 2abc^2de^2f - \\
& a^2bdef^2 - 2acdef^2 - 2ab^2cdef^2 - 2bc^2def^2 - a^2bc^2def^2 + a\sqrt{P}) \\
& / (64ab^2c^4d^2e^2f^4(ad + bcd + be + ace + abf + cf + def + abcdef)^4 \\
& (abcd + abe + abd^2e + abcde^2 + adef + ab^2def + bcdef + a^2bcdef)^2)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

となる. (6.1), (6.2) はともに分母は等しいので, 分子が一致することを示す.

(6.1) の分子の前3項, 後3項をそれぞれ展開し, P に関して集めると,

$$\begin{aligned}
& ((\alpha + \beta P) + (P + \gamma)\sqrt{P}) \times ((\alpha' + \beta'P) + (aP + \gamma')\sqrt{P}) \\
& = ((\alpha + \beta P)(\alpha' + \beta'P) + (P + \gamma)(aP + \gamma')P) \\
& \quad + ((P + \gamma)(\alpha' + \beta'P) + (\alpha + \beta P)(aP + \gamma'))\sqrt{P}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ は上のように展開したときの P のべきに関する係数である.

次に (6.2) の分子の前3項, 後3項をそれぞれ展開し, P に関して集め

ると,

$$\begin{aligned}
& ((\alpha + \beta \mathbf{P}) - (\mathbf{P} + \gamma)\sqrt{\mathbf{P}}) \times ((\alpha' + \beta' \mathbf{P}) - (\mathbf{a}\mathbf{P} + \gamma')\sqrt{\mathbf{P}}) \\
&= ((\alpha + \beta \mathbf{P})(\alpha' + \beta' \mathbf{P}) + (\mathbf{P} + \gamma)(\mathbf{a}\mathbf{P} + \gamma')\mathbf{P}) \\
&\quad - ((\mathbf{P} + \gamma)(\alpha' + \beta' \mathbf{P}) + (\alpha + \beta \mathbf{P})(\mathbf{a}\mathbf{P} + \gamma'))\sqrt{\mathbf{P}}
\end{aligned}$$

となる.

そこで, $((P + \gamma)(\alpha' + \beta' P) + (\alpha + \beta P)(aP + \gamma'))$ を計算すると,

$$\text{Simplify}[(\mathbf{P} + \gamma) (\alpha' + \mathbf{P} \beta') + (\alpha + \mathbf{P} \beta) (\mathbf{a} \mathbf{P} + \gamma')]$$

0

となり, 等式 (4.12) が成り立つことが分かる.

参考文献

- [1] Y. Cho and H. Kim, *On the Volume Formula for Hyperbolic Tetrahedra*, Discrete & Computational Geometry **22**;347-366 (1999)
- [2] R. M. Kashaev, *The Hyperbolic Volume of Knots from the Quantum Dilogarithm*, Letters in Mathematical Physics **39**;269-275 (1997)
- [3] A. N. Kirillov, *Dilogarithm Identities*, Lectures in Mathematical Sciences, The University of Tokyo (1995)
- [4] H. Murakami, *Optimistic calculations about the Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of closed three-manifolds obtained from the figure-eight knot by integral Dehn surgeries*, math.GT/0005289
- [5] H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math **186**;85-104 (2001)
- [6] J. Roberts, *Classical 6j-symbols and the tetrahedron*, Geometry and Topology **3**;21-66 (1999)
- [7] J. Roberts, *Skein Theory and Turaev-Viro Invariants*, Topology **34**;771-787 (1995)
- [8] V. G. Turaev and O. Y. Viro, *State Sum Invariants of 3-manifolds and Quantum 6j-symbols*, Topology **31**;865-902 (1992)
- [9] E. B. Vinberg, *Volumes of non-Euclidean polyhedra*, Russian Math.Surveys **48**(2);15-45 (1993)