

# 表現論から見た Kashaev 予想

村上 順

大阪大学理学研究科

## 序

R. Kashaev は, quantum dilogarithm 関数の研究から R-行列を導きだし, これより結び目の不変量を構成した。さらに, この不変量のある種の極限が双曲結び目の補空間の双曲体積をあらわしていることを予想し, 最も簡単な3つの双曲結び目に関してこのことを確かめた。さらに, Kashaev の R-行列は, [8] により量子群  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の有限次元表現の R-行列を特殊化したものであることが示された。これより, Kashaev の不変量が colored Jones 多項式の特異化であることがわかり,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  が双曲幾何的な構造と何らかの関係があることが明かとなった。Kashaev の考えた極限はある種の古典的極限であり,  $q$  が単位円周上から 1 に近づく場合に対応している。このことから,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  が双曲幾何的な構造の量子化と何らかの関係があると期待される。

双曲幾何的な構造との関係については, [14] で展開されている横田理論により, 結び目補空間の単体分割と R-行列の関係が考察され, Kashaev の予想がなぜ成り立つのかが, いくつか厳密には証明できていない事柄を使うものの大体明らかにされている。

一方, Kashaev の予想について様々な拡張が考えられる。まず, 予想に使われている不変量が複素数であり, 絶対値が体積に対応することから, 偏角も何か計量的な不変量をあらわしていると期待されるが, 実際, いくつかの例で, Chern-Simons 不変量と呼ばれるものと対応していることがわかった。また, 双曲結び目に限らず, 一般の結び目に対してもどうなるかが予想されている。境界のない3次元多様体への拡張も考えられ, 簡単な例での計算から Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量と関係することが期待されている。

ここでは,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  と Kashaev の予想やその拡張との関係を説明するとともに, 関連する話題についても紹介する。

## 1. KASHAEV の予想

R. Kashaev は, quantum dilogarithm 関数の研究から各正整数  $N$  に対し,  $\text{End}(\mathbf{C}^N \otimes \mathbf{C}^N)$  中の R-行列  $R_K^{(N)}$  を次で定義した。

$$\left(R_K^{(N)}\right)_{ab}^{cd} = N q^{1+c-b+(a-d)(c-b)} \frac{\theta([b-a-1] + [c-d]) \theta([a-c] + [d-b])}{(q)_{[b-a-1]} (q^{-1})_{[a-c]} (q)_{[c-d]} (q^{-1})_{[d-b]}}$$

ここで

$$q = \exp(2\pi \sqrt{-1}/N)$$

$$(q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - q^k)$$

$$[n] \equiv n \pmod{N}, \quad (0 \leq [n] \leq N-1)$$

$$\theta(n) = \begin{cases} 1 & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である。

Kashaev の  $R_K^{(N)}$  に対し,  $\text{End}(\mathbf{C}^N \otimes \mathbf{C}^N \otimes \mathbf{C}^N)$  の元  $R_1, R_2$  を, それぞれ 1, 2 成分と 2, 3 成分に  $R_K^{(N)}$  で作用する行列とすると, これらはずぎの Yang-Baxter 方程式, あるいはブレイド (組紐) 関係式と呼ばれている関係式をみたす。

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2$$

このような性質をもつものを R-行列, あるいは量子 R-行列と呼ぶのであるが, 一般に Yang-Baxter 方程式の解がさらに uniterity, あるいは inversion relation と呼ばれる自然な条件をみたしているとき, この R-行列から結び目の不変量が構成できることが知られている。Jones 多項式などの量子群, 量子展開環と関係した結び目の不変量は, すべてこのようにして R-行列から構成されているのである。Kashaev の R-行列  $R_K^{(N)}$  も uniterity などの自然な条件をみたしており,  $R_k^{(N)}$  から結び目の不変量が構成される。結び目  $L$  に対するこの不変量を  $K_N(L)$  と書こう。

結び目  $L$  は、その補空間に負の定曲率空間としての構造（双曲構造と呼ばれる）がはいるとき、双曲結び目と呼ばれる。負の定曲率空間の普遍被覆空間は3次元ボール  $B^3$  と同相となり、双曲結び目  $L$  の補空間は、 $B^3$  の負の定曲率空間としての isometry 群の、 $S^3 \setminus L$  の基本群  $\pi_1(S^3 \setminus L)$  と同型なある離散部分群  $\Gamma$  による商空間となるのである。この商空間の体積は有限となることが知られている。曲率を  $-1$  に正規化したときのこの体積を  $L$  の双曲体積と呼び、 $\text{Vol}(L)$  と書く。また、 $\Gamma$  の作用による基本領域として、Figure 1 のような理想4面体 (ideal tetrahedron) と呼ばれる、頂点が無限遠点となる4面体をいくつかあわせたものがとれる。結び目補空間の双曲体積は、これらの理想4面体の体積の和となる。

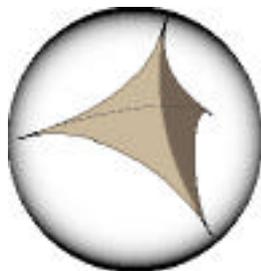


FIGURE 1. 理想4面体 (ideal tetrahedron)

Kashaev は、双曲結び目  $L$  に対しては、その双曲体積  $\text{Vol}(L)$  が次式で与えられることを予想した。

Kashaev の予想 [4]

$$\text{Vol}(L) = 2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |K_N(L)|}{N}$$

Kashaev はこの予想が Figure 2 の3つの結び目で成立つことを確かめた。 $4_1$  と書かれる8の字結び目に関しては正確に成立っており、 $5_2$ 、 $6_1$  については数値的に成立つことを確認した。 $N$  に関して指数関数的に増大する増大度を見るため、鞍点法と呼ばれる、微分が消える点（複素関数なので鞍点となる）での値を用いて漸近展開の主要項を求める手法を用いているが、この手法は、物理数学としては標準的なものだが、一部数学的な厳密さに欠ける部分もある。実際には鞍点が複数あり、鞍点の値が本当に主要項をあらわしているのか、また、複数の鞍点のうちどれを選ぶべきなのかがきちんとはわからない。

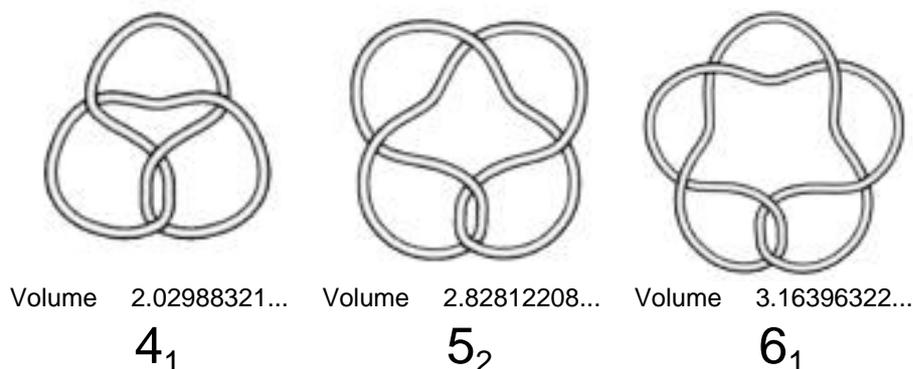


FIGURE 2. Kashaev の例

しかしながら，この結果は，ある量子 R-行列と双曲体積との間に何らかの関係があることを示している。

## 2. KASHAEV の R-行列の構成

Kashaev は彼の R-行列を次のように構成した。  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$  とする。まず，Weyl 代数と呼ばれる，2元  $X, Y$  で生成され，次の関係式をみたす algebra について，ある表現の族を考える。

$$XY = qYX$$

この代数は， $U_q(sl_2)$  で  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$  としたものの上半三角部分に対応するものである。さて，この Weyl 代数に関して， $U_q(sl_2)$  の minimal cyclic 表現に対応する  $N$  次元表現の族を考える。minimal cyclic 表現においては， $X^N, Y^N$  は中心の元となり，スカラーに対応するが，特に  $X^N$  の値により，表現が一意的にパラメトライズされる。表現  $\rho$  に対し，このパラメータを  $t_\rho$  と書く。  $t_\rho$  が generic なとき， $\rho$  は既約表現となる。  $U_q(sl_2)$  が Hopf 代数の構造を持つように，Weyl 代数も余積で定義される Hopf algebra の構造をもつ。

$$\Delta(X) = X \otimes X, \quad \Delta(Y) = X \otimes Y + Y \otimes 1$$

さらに、この族はテンソル積に関して閉じており、パラメータが一般の時は、2つの表現  $\rho, \tau$  のテンソル積が、 $t_\rho t_\tau$  をパラメータとする  $N$  個の同値な表現の直和と同型になる。そこで  $t_\rho t_\tau$  に対応する表現を  $\rho\tau$  とする。

このようなテンソル積で閉じた表現のカテゴリがあるとき、次のようにして  $6j$ -symbol と呼ばれるものが定義される。

まず余積の余結合律から、次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3 & \longrightarrow & \rho_1 \rho_2^{\oplus N} \otimes \rho_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho_1 \otimes \rho_2 \rho_3^{\oplus N} & \longrightarrow & \rho_1 \rho_2 \rho_3^{\oplus N^2} \end{array}$$

ここで、2つの表現のテンソル積を  $N$  重の重複度のある空間の既約成分へ分解する射影を  $N$  個定めておくと、この図を右回りにたどる写像と左回りにたどる写像が等しくなることから、分解に関する  $N^2$  個のパラメータについての変換行列が定義される。2つの射影の合成は  $N^2$  通りあり、この一つ一つが  $N^2$  通りある反対周りの2つの射影の合成の一次結合となり、この係数からなる行列を考えるのである。このようにして3つの表現  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  に対して  $N^2 \times N^2$  の行列が定義される。これを

$$R(\rho_1, \rho_2, \rho_3)_{\gamma, \delta}^{\alpha, \beta}$$

とかく。 $\alpha$  は  $\rho_1 \otimes \rho_2$  中の  $\rho_1 \rho_2$  を特定するパラメータであり、同様に、 $\beta$  は  $\rho_1 \rho_2 \otimes \rho_3$  中の  $\rho_1 \rho_2 \rho_3$  を、 $\gamma$  は  $\rho_2 \otimes \rho_3$  中の  $\rho_2 \rho_3$  を、 $\delta$  は  $\rho_1 \otimes \rho_2 \rho_3$  中の  $\rho_1 \rho_2 \rho_3$  を特定するパラメータとする。これらのパラメータを  $\mathbb{C}_N$  の元とみて、 $R(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  を  $\text{End}(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N)$  の元とみる。さらに、4つの表現のテンソル積に関する余結合律の well-definedness から pentagon relation と呼ばれる次の関係式が従う。

$$\begin{aligned} R_{12}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) R_{13}(\rho_1, \rho_2 \rho_3, \rho_4) R_{23}(\rho_2, \rho_3, \rho_4) \\ = R_{23}(\rho_1 \rho_2, \rho_3, \rho_4) R_{12}(\rho_1, \rho_2, \rho_3 \rho_4) \end{aligned}$$

ここで、 $R_{ij}(\dots)$  はテンソル積の第  $i$  成分と第  $j$  成分とに  $R(\dots)$  で作用する行列をあらわす。この関係式は余結合律から次の可換図式により得られる。

$$\begin{array}{ccccc}
((\rho_1\rho_2)\rho_3)\rho_4 & \xleftarrow{R_{12}(\dots)} & (\rho_1(\rho_2\rho_3))\rho_4 & \xleftarrow{R_{13}(\dots)} & \rho_1((\rho_2\rho_3)\rho_4) \\
\uparrow R_{23}(\dots) & & & & \uparrow R_{23}(\dots) \\
(\rho_1\rho_2)(\rho_3\rho_4) & \xleftarrow{R_{12}(\dots)} & & & \rho_1(\rho_2(\rho_3\rho_4))
\end{array}$$

さて,  $R(\rho_1, \rho_2, \rho_3)_{\gamma, \delta}^{\alpha, \beta}$  の各成分は,  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  で決まる複素数  $x, y$  により

$$\delta(\gamma + \delta - \beta) \times (q \text{ べき及び正規化の項}) \times \prod_{j=1}^{\gamma-\alpha} (y - xq^j)$$

となる。ただし,  $\delta(n)$  はいわゆるデルタ関数のことで  $n \equiv 0 \pmod{N}$  のとき 1 でそれ以外の時は 0 となる関数のことである。

注意  $R$  の行列成分は, 適当な仕方で  $N$  を無限大にした極限をとると, 普通の dilogarithm 関数になる上に,  $N$  が有限のところでも pentagon relation という dilogarithm 関数を特徴付ける関係式をみたしているので, この行列成分は dilogarithm 関数の  $q$ -analogue あるいは量子化と見なせる。

結び目の交点に対応する  $R$ -行列を構成するため Kashaev はこの  $R(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  を 9 個組み合わせた。そして pentagon relation により, 4 面体の数を 4 個まで減らし, 最初に述べた  $R$ -行列  $R_K^{(N)}$  を得たのである。

この  $R$ -行列  $R_K^{(N)}$  が作用する空間  $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$  の意味を復習しておこう。最初に構成された表現が  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の minimal cyclic 表現だったことから, この空間も minimal cyclic 表現の表現空間のように思えるが, よく構成を見ていくと, そうではなくて, minimal cyclic 表現 2 つをテンソルしたときの重複度をあらかず空間であることがわかる。次節で, この空間が  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の  $N$  次元既約表現と対応することが明かとなるが, このことは, minimal cyclic 表現 2 つのテンソル積の重複度をあらかず空間に, 別の形で  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の作用があることを示唆している。

### 3. COLORED JONES 多項式

Kashaev の構成した R-行列  $R_K^{(N)}$  は、まず minimal cyclic 表現に関する  $6j$ -symbol を求めてからそれを組み合わせて作られた。また、 $6j$ -symbol  $R(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  での成分をあらわすパラメータは、表現のテンソル積での  $N$  重の重複度に対応するものであった。

このような  $\text{End}(\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N)$  中の R-行列で他に知られているものとして、次のものがある。

1.  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  の自然表現に対応する R-行列
2.  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の既約  $N$  次元表現に対応する R-行列
3.  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の  $N$  次元 minimal cyclic 表現に対応する R-行列

上の3番目の R-行列は普遍 R-行列からは定義されない特別な R-行列であり、文献 [3] で対応する不変量についても調べられている。これらのどれかと Kashaev の R-行列が関係あるかどうか考えてみよう。Kashaev の構成法を見ると、minimal cyclic 表現と関係することから、この3番目に対応する不変量と似ているのではないかと期待したのであるが、実は、この不変量は Alexander 多項式で決まってしまうことが知られている。Kashaev の不変量は双曲体積との関係が期待されているが、双曲結び目で双曲体積が 0 でないにも関わらず、Alexander 多項式が自明、つまり 1 となるものがあり、Alexander 多項式と双曲体積とはそれほど関係しているとは考えられないので、Kashaev の不変量とも関係なさそうである。次に1番目について見てみよう。この場合は、対応する不変量は HOMFLY 多項式と呼ばれる、Jones 多項式と同様のスケイン関係式で定義される不変量であり R-行列は2つの固有値しか持たない。一方 Kashaev の R-行列は1の場合の R-行列とくらべると複雑で多くの異なる固有値を持つため、これも関係なさそうである。

そこで残るは上の2の場合である。 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  の  $N$  次元既約表現は、 $q$  が原始  $N$  乗根の場合は one-parameter deformation を持つことが知られている。この表現の族は、minimal cyclic 表現のある極限とも見なせるものであるが、minimal cyclic 表現では、すべての生成元が可逆元として表現されるのに対し、この表現では Cartan に入る元以外はべき零元として表現される。この  $q$  が原始  $N$  乗根の場合の表現の one-parameter family に対し、この表現に

関する普遍 R-行列の表現から [1] で結び目の不変量が構成されている。この不変量を 阿久津-出口-大槻 不変量 と呼ぶことにしよう。これは  $N = 2$  のときはよく知られた Alexander 多項式と一致する。一方, Kashaev の不変量は  $N = 2$  のとき, Alexander 多項式でそのパラメータを  $-1$  としたものに一致することがわかっている。このことから, 非常に楽観的に考えると,  $-1$  が  $1$  の原始  $2$  乗根なので,  $N$  が一般の時の Kashaev の不変量も, 阿久津-出口-大槻 不変量 で, パラメータを  $1$  の原始  $N$  乗根としたものと一致するのではないかと期待される。阿久津-出口-大槻 不変量 に対応する R-行列の定義は複雑であるが, 幸いなことに, 阿久津-出口-大槻 不変量でパラメータを  $1$  の原始  $N$  乗根としたものは,  $U_q(sl_2)$  の  $N$  次元既約表現に対応する R-行列に対応する結び目の不変量 (colored Jones 多項式と呼ばれている) で  $q$  を  $1$  の原始  $N$  乗根としたものに一致する。このことから, Kashaev の不変量は,  $U_q(sl_2)$  の  $N$  次元表現に対応する colored Jones 多項式で,  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$  と特殊化したものに一致するのではないかと期待される。

そこで,  $U_q(sl_2)$  の  $N$  次元表現に対応する R-行列と Kashaev の R-行列とをくらべてみよう。  $U_q(sl_2)$  の  $N$  次元表現に対応する R-行列を  $R_J^{(N)} \in \text{End}(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N)$  とすると,

$$\begin{aligned} \left(R_J^{(N)}\right)_{k,l}^{i,j} &= \sum_{n=0}^{\min(N-1-i,j)} \delta_{l,i+n} \delta_{k,j-n} q^{(2-(N-1)/2)(j-(N-1)/2)-n(i-j)/2-n(n+1)/4} \\ &\quad \times \frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})^n}{[n]_q!} \frac{[i+n]_q!}{[i]_q!} \frac{[N-1+n-j]_q!}{[N-1-j]_q!} \end{aligned}$$

である。ここで

$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q,$$

$$[k]_q = \frac{q^{k/2} - q^{-k/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

とする。

この R-行列から定まる結び目の不変量で自明な結び目に対して  $1$  となるように正規化したものをさらに  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$  と特殊化したものを  $J_N$  とする。これは, colored Jones 多項式と呼ばれるものの  $q$  を特殊化したものである。このとき, 実際に次が成り立つことがわかった。

定理 [8] Kashaev の不変量  $K_N$  と colored Jones 多項式を特殊化した  $J_N$  とは等しい。すなわち、結び目  $L$  に対し

$$K_N(L) = J_N(L)$$

が成り立つ。

Colored Jones 多項式は  $U_q(sl_2)$  の自然表現 (2次元表現) のテンソル積表現と対応しており、結び目に平行化と呼ばれる操作を施したものの Jones 多項式からも求まるものである。このことから、Kashaev の予想は、結び目の Jones 多項式と双曲体積が何らかの関係があることを示唆している。

Jones 多項式の発見以来、この不変量が統計物理など様々な数学と関係することがわかったのであるが、結び目補空間のどのような幾何学的性質を反映するものなのかは長いこと謎であった。これに対し、Kashaev の予想は、Jones 多項式が、結び目補空間に対して canonical に定義される幾何的構造と深く関係していると主張している。

この定理の証明では、2種類の R-行列  $R_N^{(N)}$  と  $R_j^{(N)}$  がほぼ相似になることが本質的である。相似変換を与える行列は、 $W \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$  を

$$W = (q^{(i-1)(j-1)})_{ij}$$

という、バンドルモンド型の行列、あるいは離散フーリエ変換というべき行列とし、これの2つのテンソル積  $W \otimes W \in \text{End}(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N)$  である。これは、 $N$  が小さいところでの2種の R-行列のジョルダン標準形を比べ、その間の変換行列を求めていくことで予想されたものである。

なぜ、このような離散フーリエ変換の行列が変換行列として出てくるのかは良くわかっていないが、双曲構造に関して良く出てくる群は  $SL(2, \mathbb{R})$  という、非コンパクトなリー群である。Kashaev 予想に関連して定まる体積や Chern-Simons とした計量的な不変量はどれもゲージ理論的には  $SL(2, \mathbb{R})$  を用いて決まる量である。一方、Jones 多項式や colored Jones 多項式はコンパクトなリー群  $SU(2, \mathbb{C})$  に対応するゲージ理論から出てくることが Witten によって示されている。フーリエ変換は、非コンパクトなものと同コンパクトなもの間の双対関係を与えるものなので、ここでも  $SL(2, \mathbb{R})$  的なものと  $SU(2, \mathbb{C})$  的なものとの関係を与えていると解釈することができる。こう考えると、Kashaev の R-行列は、 $SL(2, \mathbb{R})$  に対応する量子 R-行列のように思える。

## 4. 横田理論

文献 [14], [15] により, なぜ Kashaev の予想が成り立っているのかのおおよそのメカニズムが明らかになってきた。Kashaev の計算では, 不変量の極限を計算するに当たり, 次のような関数  $V$  を導入した。

$$K_N(L) \sim \int_{x_1, \dots} \exp \frac{N}{2\pi\sqrt{-1}} V(x_1, \dots) dx_1 \dots$$

この  $V$  は, quantum factorial を dilogarithm 関数で近似したりしてえられる解析関数である。また, 変数  $x_1, \dots$  は, もとの不変量を  $R$ -行列の成分の和としてあらわすときの  $1$  から  $N-1$  まで動くパラメータを複素化したものである。この式の右辺の積分は, 鞍点法により,  $V$  の微分が消えている点の寄与が  $N \rightarrow \infty$  での主要項を決定することが知られている。正確には,  $V$  は多価関数であり, 積分路の取り方など, いくつか技術的な問題があり, この積分の漸近挙動から  $K_N(L)$  の漸近挙動がきちんと分かるわけではないが,  $V$  の鞍点での  $V$  の値をみると, その虚部が  $\text{Vol}(L)$  と一致するものがあったのである。

横田理論は, この  $V$  の鞍点と, 補空間の双曲構造とを結び付ける理論である。まず, 結び目  $L$  の図から補空間  $S^3 \setminus L$  の理想四面体による分割を構成する。この分割を 横田分割 と呼ぼう。理想四面体は一つの複素数によってその形が決まる。横田分割では各交点のまわりが4つの四面体に分割され, Kashaev の  $R$ -行列での4つのパラメータ  $a-c, c-b, b-d, d-a$  がそれぞれの四面体の形をきめる数とみる。これらのパラメータがさきの  $V$  の変数と対応するのである。さて, これらの理想四面体を張り合わせたものが結び目補空間の双曲構造を定めるためには, 例えば, 一つの辺の周りに集まる面角の和が  $2\pi$  にならなければならないなど, いくつかの条件をみたす必要がある。これらの条件は, 四面体の形をきめるパラメータに関する式としてあらわされ, hyperbolicity equation と呼ばれている。

横田理論の主張 [15]
--------------

Hyperbolicity equation と $V$ の鞍点を与える各パラメータでの偏微分が $0$ という方程式系とがほぼ一致する。さらに, このときは, $V$ が丁度各四面体の体積の和となる。
---

鞍点法の使い方などにいくつかの問題点が残ってはいるが, Kashaev 予想がなぜ成り立つかはこれでだいたい説明できるようになった。

## 5. KASHAEV の予想の一般化

Kashaev の不変量が colored Jones 多項式と関係することから, colored Jones 多項式の性質を用いて予想を一般化することができる。結び目の連結和に関する振る舞いから, 一般の結び目に関する拡張を考えると, 次のような予想が考えられる。

体積予想 [8]

$$\|L\| = \frac{2\pi}{v_3} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |J_N(L)|}{N},$$

ただし,  $\|L\|$  は  $L$  の補空間の Gromov による simplicial volume をあらわし,  $v_3$  は, regular ideal tetrahedron の体積をあらわす定数である。

Gromov による simplicial volume は, 双曲結び目に関しては双曲体積を  $v_3$  で割ったものとなる。また, 双曲結び目の連結和は一般に双曲結び目にはならないが, simplicial volume は連結和に関して加法的なので, 上記の予想が期待されるのである。

体積予想が成り立つとすると次が成り立つ。

体積予想の帰結 [8] Colored Jones 多項式は自明な結び目を特徴付ける。すなわち, ある結び目のすべての colored Jones 多項式が自明な結び目の colored Jones 多項式とそれぞれ一致するとき, その結び目は自明な結び目である。

これは, simplicial volume が 0 になる結び目の分類から従う。Jones 多項式が自明になる結び目は自明な結び目に限るか, という問題が Jones 多項式が発見された当初から考えられていた。上のことは, この問題の解答ではないが, ある結び目をどれだけ平行化しても自明な結び目を同様に平行化したものと同じ Jones 多項式を持つなら, この結び目が自明な結び目である, ということはわかるようになる。

さらに, 上の帰結は, 次を含んでいる。

体積予想の帰結の系 [8] Vassiliev 不変量 (有限型不変量) は自明な結び目を特徴付ける。すなわち, ある結び目のすべての Vassiliev 不変量が自明な結び目の Vassiliev 不変量とそれぞれ一致するとき, その結び目は自明な結び目である。

Vassiliev 不変量すべてを考えあわせれば結び目がほぼすべて分類できるだろう (Birman 予想) と期待されているのであるが, 体積予想が解ければ, 少なくとも自明な結び目は分類されていることがわかるのである。

さて, Kashaev の予想は, 不変量の絶対値の増大度に関するものであった。しかし, 不変量  $J_N$  は, 一般に複素数値をとる。そこで, 偏角にも何か意味があるのではないかと考えられる。文献 [10] や [13] により, 3次元双曲多様体の体積の自然な複素化とは, 実部が体積で, 虚部が Chern-Simons 不変量 [2], [6] となる複素数であろうと考えられている。[9] でのいくつかの例の計算から, 双曲結び目  $L$  について, 次のように予想される。

Kashaev 予想の複素化 [9]

$$2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log J_N(L)}{N} = \text{Vol}(L) + \sqrt{-1} \text{CS}(L).$$

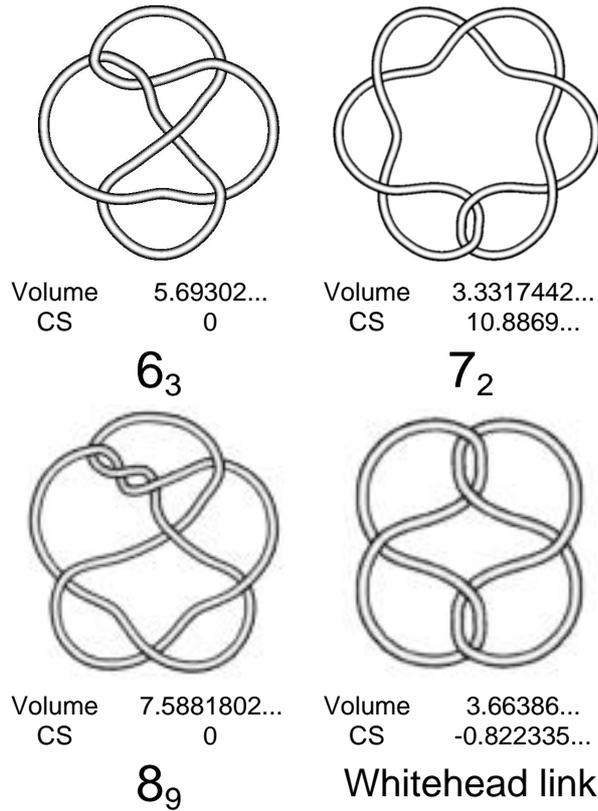


FIGURE 3. 文献 [9] での例

Kashaev の例に加え, Figure 3 の結び目について Kashaev の方法にならって計算すると, Vol に当たるものの虚部に Chern-Simons 不変量 (CS) があらわれていることが [9] で確認されている。

さらに, 体積予想の境界のない閉じた 3次元多様体への拡張も考えられる。3次元多様体に関する  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  と対応する不変量としては, Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量がある。これは, 3次元多様体の link (複数の成分を持つ結び目) による表示を用いて定義される。この場合は link の各成分に framing と呼ばれる数を対応させ, この数で定まるひねり方を使って, link の各成分の近傍を別の solid torus に付けかえるのである。このような操作は surgery と呼ばれている。

さて, colored Jones 多項式など, 結び目の量子不変量は, 量子展開環の普遍 R-行列から定義されるが, 実は, このようにして定義された不変量は, もともとは結び目の framing によるものになり, link の不変量とするためには, 補正を必要としていた。そこで, link  $L$  の各成分に  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  の  $d_1, d_2, \dots, d_l$  次元表現を対応させる colored Jones 多項式について,  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$  とし, framing についての補正を行う前の不変量を  $\tilde{J}_{N,d_1,d_2,\dots}$  とする。このとき, framed link  $L$  に関する surgery で得られる 3次元多様体  $M_L$  の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量  $\tau_N(M_L)$  は,

$$\tau_N(M_L) = \sum_{d_1, d_2, \dots = 1}^{N-1} [d_1] [d_2] \cdots \tilde{J}_{N,d_1,d_2,\dots}(L)$$

で定義される。[ $n$ ] は前で定義された Gauss 整数で, 表現空間の quantum dimension をあらわしている。

$N$  を大きくしたときの漸近挙動については, Witten 予想といわれているものがあり, 完全には証明されていないが, いくつかの計算例により確かめられている。Witten 予想によると, 漸近挙動が Reidemeister torsion で決まるといわれているのだが, これは, 双曲構造とはあまり関係ないものなので, 体積予想を閉多様体に拡張する方法がなかなかわからなかった。しかし, [7] により  $\tau_N(M_L)$  も双曲体積などに関係することが明らかにされた。ここでは, 8 の字結び目の surgery によって得られる 3次元多様体に対する  $\tau_N$  に対して Kashaev の計算法をまね, quantum factorial を dilogarithm function で置き換え, 鞍点法を使ってみると, 鞍点の一つから双曲体積と

Chern-Simons 不変量が出て来ることが (数値的にはあるが) わかった。この結果を一般化すると, 次のような予想になる。

3次元閉多様体に関する体積予想

$L$  を  $S^3$  中の1つの framed link とし,  $M_L$  を  $S^3$  から  $L$  に沿った surgery で得られる3次元多様体とする。このとき  $M_L$  が双曲多様体, すなわち負の定曲率空間としての構造が入る多様体であれば

$$2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} ' \frac{\log \tau_N(M_L)}{N} = \text{Vol}(M_L) + \sqrt{-1} \text{CS}(M_L)$$

が成り立つ。

ここで  $\lim$  に ' がついているが, これは Kashaev の方法をまねて計算したという意味である。

この  $\lim'$  はどう考えたら良いのであろうか。  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \tau_N(M_L)}{N}$  の計算では,  $N$  が動くにつれて, いくつかのものが同時に動いて極限に到達する。 $q$  が  $N$  によって変化するし, 表現をあらわすパラメータも  $N$  による。文献 [7] での計算は, 表現をあらわすパラメータについて先に連続化し, その後で  $N$  を無限大に飛ばしているように思えるので, 表現をあらわすパラメータを連続化するというのがどういうことなのか考えてみた結果, 次節に述べる最高ウェイト表現と関係しているのではないかと思われる。

6.  $q$  が 1 の原始  $N$  乗根のときの  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の最高ウェイト表現

$q$  が 1 の原始  $N$  乗根のときの最高ウェイト表現を構成してみよう。まず,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2) = \langle E, F, K \mid K E K^{-1} = q E, \quad K F K^{-1} = q^{-1} F, \\ E F - F E = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \rangle \end{aligned}$$

とし,  $v_0$  をウェイト  $\lambda$  の最高ウェイトとする。すなわち,

$$E v_0 = 0, \quad K v_0 = q^\lambda v_0$$

とする。このとき,

$$v_i = F^i v_0, \quad E v_i = [\lambda + 1 - i][i] v_{i-1}$$

により  $v_0, v_1, \dots$  で張られる空間上に  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の無限次元表現が定義される。さて,  $q$  が 1 の  $N$  乗根のときは  $[N] = 0$  となるので,  $v_N, v_{N+1}, \dots$

は  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の作用で不変な部分空間となり,  $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$  で張られる空間への  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の作用を定義できる。この  $N$  次元表現を  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  のウェイト  $\lambda$  の最高ウェイト表現と呼ぶことにする。この構成は任意の  $\lambda$  について可能である。3次元多様体の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量の定義で使われる colored Jones 多項式  $\tilde{J}_{N,n}$  は, 最高ウェイトが  $(n-1)/2$  の最高ウェイト表現の一つの既約成分となっている。残りの既約成分の次元は  $N-n$  である。このとき, Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量においてこの2つの表現による寄与は等しくなっており, 最高ウェイト表現からの寄与としてまとめて考えることができる。

最高ウェイト表現に対して,  $R_K$  と  $R_J$  の間の関係を付けた離散フーリエ変換を行うと,  $R_K$  と似た行列を得る。 $R_K$  の一部に  $\lambda$  が入ったものが得られるのである。横田理論はこの行列に対しても適用できる形になっており, 3次元多様体に対しても体積予想が成り立つと期待する一つの根拠となる。なお, 前にも述べたように, フーリエ変換した後のものは  $SL(2, \mathbb{R})$  に対応すると見た方が自然なようなので,  $SL(2, \mathbb{R})$  の表現と  $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$  の表現との関連からも調べてみる必要があるであろう。

## 7. $6j$ -SYMBOL と体積

最後に,  $R$ -行列のかわりに  $6j$ -symbol を用いた不変量と体積の関係について考えてみる。 $6j$ -symbol とは,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の既約表現の表現空間のテンソル積における既約表現の埋め込み  $P_\lambda^{\mu\nu} : V_\lambda \otimes V_\mu \rightarrow V_\nu$  と既約表現への射影  $P_{\mu\nu}^\lambda : V_\nu \rightarrow V_\lambda \otimes V_\mu$  とを用いて,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ -写像

$$V_i \xrightarrow{P_i^{jk}} V_j \otimes V_k \xrightarrow{1 \otimes P_k^{lm}} V_j \otimes V_l \otimes V_m \xrightarrow{P_{ji}^n \otimes 1} V_n \otimes V_m \xrightarrow{P_{mn}^i} V_i$$

のあらかず, 表現をあらかず6個のパラメータ  $i, j, k, l, m, n$  から決まるスカラーのことである。文献 [12] で, 向き付け可能な3次元多様体の単体分割に対し, 辺に表現をあらかずパラメータを対応させ, 4面体にその辺のパラメータに対応する  $6j$ -symbol を対応させる状態和を用いて3次元多様体の不変量が定義されている。これは, 実は Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量の絶対値の2乗となるのであるが,  $6j$ -symbol は,  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  の余積についての余結合律から pentagon relation と呼ばれる関係式をみだし, より体積に近いものと考えられる。Pentagon relation は, dilogarithm 関数や

quantum dilogarithm 関数でも成り立っているものであるが、その幾何学的意味は Figure 4 で与えられる。ある 6 面体を、左の図のように 2 つの 4 面体を水平面であわせたものと思うか 3 つの 4 面体を縦の軸の周りであわせたと思うかで 5 つの 4 面体についての関係が付き、例えば、理想 4 面体の場合の体積についてこの関係式を適用すると dilogarithm 関数の pentagon relation が求まったりするのである。

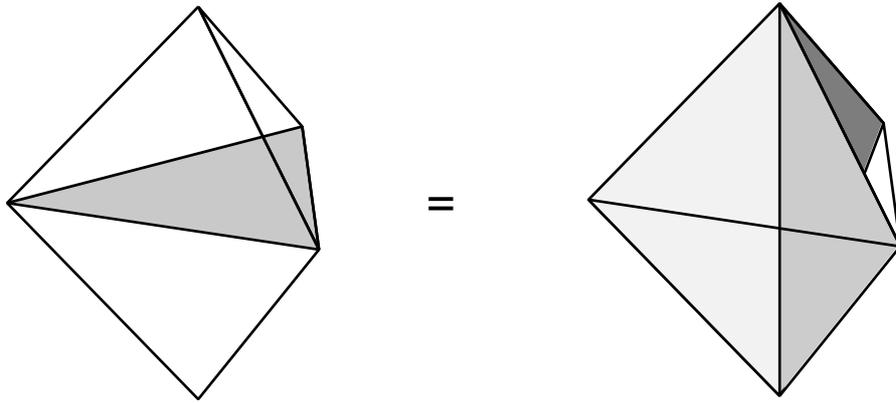


FIGURE 4. Pentagon relation の幾何学的意味

このように見ると、 $R$ -行列より  $6j$ -symbol の方がより体積と関係あるように思える。ユークリッド空間の場合には 4 面体の体積と  $6j$ -symbol とが実際に関係していることが [11] で示されている。この場合は、古典的な  $6j$ -symbol、すなわち、リー環  $sl_2$  の表現から定義される  $6j$ -symbol と関係する。 $T$  を 6 辺の長さがそれぞれ  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  である 3 次元ユークリッド空間の 4 面体とする。また、 $a_i$  に対応する辺における 2 面の面角を  $\theta_i$  とする。このとき、 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  をそれぞれ  $k$  倍したのに対応する  $6j$ -symbol は  $T$  の体積  $V$  を用いて次のようにかける。

古典的  $6j$ -symbol の漸近挙動と 4 面体の体積 [11]

$k \rightarrow \infty$  のとき、

$$\left\{ \begin{array}{l} ka_1, \dots, ka_6 \text{ できる} \\ \text{古典的 } 6j\text{-symbol} \end{array} \right\} \sim \sqrt{\frac{2}{3\pi V k^3}} \cos \left( \sum_{i=1}^6 (ka_i + 1) \frac{\theta_i}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

である。

双曲空間中の4面体に対しては,  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  に対応する quantum  $6j$ -symbol と体積とが関係すると期待されている。この場合,  $q = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$  とし,  $ka_i/N$  が一定となるように  $k$  と  $N$  とを増大させたときの quantum  $6j$ -symbol の漸近挙動を見たときに, 指数関数的に減少して, その減少度合いをあらわす係数が4面体の体積に比例するのではないかと思われる。なお, この場合の対応する4面体は, 各辺での面角が  $ka_i\pi/N$  となるものではないかと思われるが, まだ良くわからない。いずれにせよ, pentagon relation があることより, 何らかの意味で quantum  $6j$ -symbol と双曲空間の4面体が関係すると期待される。

## 8. 最後に

Kashaev の予想については横田理論により大体の様子はわかったのであるが, この理論での鞍点を与える方程式と双曲構造を定める方程式との一致について, 今のところその本質をあらわす説明が得られていない。丹念に見比べていくとたまたま一致したかのようである。しかし, このようなことが単なる偶然でおこるとはとても考えられないので, 何らかの理論的根拠があるはずである。これを解明できれば, 双曲結び目に限らず, 様々な拡張に対し, 統一的な説明が得られるのではないかと期待している。

## REFERENCES

- [1] Y. Akutsu, T. Deguchi and T. Ohtsuki, *Invariants of colored links*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 161-184.
- [2] S. S. Chern and J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. Math. **99** (1974), 48-69.
- [3] E. Date, M. Jimbo, K. Miki and T. Miwa, *Braid group representations arising from the generalized chiral Potts models*, Pacific J. Math. **154** (1992), 37-66.
- [4] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39** (1997), 269-275.

- [5] A. N. Kirillov, *Dilogarithm Identities*, Lectures in Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 1995.
- [6] R. Meyerhoff, *Density of the Chern-Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds*, Low-dimensional topology and Kleinian groups (Coventry/Durham, 1984), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986, pp. 217–239.
- [7] H. Murakami, *Optimistic calculations about the Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of closed 3-manifolds obtained from the figure-eight knot by integer surgeries*, math.GT/0005289, to appear in the Proceedings of the workshop ‘Recent Progress toward the Volume Conjecture’, International Institute for Advanced Study, March, 2000
- [8] H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, math.GT/9905075, to appear in Acta Math.
- [9] H. Murakami, J. Murakami, M. Okamoto, T. Takata and Y. Yokota, *Kashaev’s conjecture and the Chern-Simons invariants of knots and links*, preprint, Kyushu University.
- [10] W.D. Neumann and D. Zagier, *Volumes of hyperbolic 3-manifolds*, Topology **24** (1985), 307–332.
- [11] J. Roberts, *Classical 6j-symbols and the tetrahedron*. Geom. Topol. **3** (1999), 21–66 (electronic Journal).
- [12] V. G. Turaev and O. Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbol*, Topology **31** (1992), 865–902.
- [13] T. Yoshida, *The  $\eta$ -invariant of hyperbolic 3-manifolds*, Invent. Math. **81** (1985), 473–514.
- [14] Y. Yokota, *On the volume conjecture of hyperbolic knots*, Knot Theory - Dedicated to Professor Kunio Murasugi for his 70th birthday -, edited by M. Sakuma et. al., 2000, 362-367.
- [15] Y. Yokota, *On the volume conjecture for hyperbolic knots*, preprint, Kyushu University.